Multiples Testen und simultane Konfindenzbereiche

Häufig werden bei multiplen linearen Modellen mehrere Tests durchgeführt oder für mehrere Parameter Konfidenzintervalle bestimmt. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine falsche Entscheidung getroffen wird, höher als das (lokale) Niveau der einzelnen Tests.
Abhilfe: mutiple Testprozeduren.
Gegeben: Hypothesen $H_{0,1}, \ldots H_{0,k}$
z.B.: $H_{0,1} : \tau_1 = 0 \qquad H_{0,2} : \tau_2 = 0$ usw.
lokales Niveau: Einzelniveau der Tests
globales Niveau: Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Nullhypothese abgelehnt wird, obwohl alle Nullhypothesen gelten.
multiples Niveau: Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Nullhypothese fälschlicherweise abgelehnt wird $< \alpha$.

Strategie

- **Bonferroni:** Allgemeine Methode für m Tests, das sehr allgemein anwendbar ist
- **Scheffe:** Allgemeine Methode im linearen Modell für eine grosse Anzahl von Hypothesen bzw. Parametern
- **Tukey, Hothorn et al.:** Methode nach dem multiple Range Prinzip bzw. nach Maximum-Prinzip.
- **Abschlussprozeduren:** Für Testsysteme häufig mächtiger als andere Prozeduren : Wichtig im Fall des Vergleichs von 3 Gruppen

Andere Verfahren halten das multiple Niveau nicht und sollten daher eher gemieden werden: Duncan multiple Range, Fisher LSD, Newman-Keuls.

Bonferroni

Verwende bei k vorher festgelegten Tests jeweils das lokale Signifikanzniveau $\alpha_l = \alpha/k$
Die Eigenschaften folgen unmittelbar aus der Bonferroni Ungleichung

$$P\left(\bigcup E_i\right) \leq \sum P(E_i)$$

Eigenschaften:

- Sehr allgemein anwendbar
- Einfach durchführbar
- Hält multiples Niveau
- Bei sehr vielen Tests ungeeignet, da die Power gering ist

Konfidenzellipsoide

Sei das Modell (2.1) mit NV-Annahme (2.5) gegeben.
Dann ist

$$\left\{\beta \,|\, (\beta - \hat{\beta})'(X'X)(\beta - \hat{\beta}) \leq p'\hat{\sigma}^2 F_{1-\alpha}(p', n-p')\right\} \qquad (5.1)$$

eine Konfidenzregion für β.

Entsprechendes gilt für lineare Transformationen $\gamma = A\beta$:

$$\left\{\gamma \,|\, (\gamma - \hat{\gamma})' \widehat{V(\hat{\gamma})}^{-1} (\gamma - \hat{\gamma}) < \dim \gamma \cdot F_{1-\alpha}(\dim(\gamma), n - p')\right)\right\}$$

ist Konfidenzregion zum Sicherheitsniveau $1 - \alpha$.

Konfidenzintervalle nach Scheffe

Sei Modell (2.1) mit NV-Annahme (2.5) gegeben.
Dann sind

$$\hat{\beta}_j \pm \sqrt{p' F_{1-\alpha}(p', n-p')}\ \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j} \tag{5.2}$$

für die Parameter β_j und

$$\hat{\gamma} \pm \sqrt{p' F_{1-\alpha}(p', n-p')}\ \hat{\sigma}_{\hat{\gamma}}$$

für beliebige Linearkombinationen $\gamma = a'\beta$ simultane Konfidenzintervalle.

Strategie mit Maximum- Statistiken

Tests nach Tuckey und Horthorn et al Wir betrachten Hypothesen der Form

$$A\beta - c = 0$$

mit den einzelnen studentisierten Komponenten (Zeilen)

$$T_i = d'\beta / \hat{\sigma}_{d'\beta}, i = 1, ...a$$

$$Q = max|T_i|$$

Sei Q(n-p',R) ist Verteilung des Maximums von t-Verteilungen mit Korrelationsmatrix R.

$$\begin{aligned} & P(Q \leq q) = \alpha \\ & \Longrightarrow P(\max_i |T_i| \leq q) = \alpha \\ & \Longrightarrow P(\forall i : |T_i| \leq q \cdot \sqrt{\hat{\sigma}/n}) = \alpha \end{aligned}$$

d.h. wir erhalten **simultane** KIs.

Bemerkungen

- Das Vorgehen ist sehr allgemein auf asymptotisch normalverteilte Teststatistiken anwendbar.
- Umsetzung im R-package `multcomp` (inklusive Angaben von entsprechenden p-Werten).
- Artikel Simultaneous inference in general parametric models Hothorn, T Bretz, F; Westfall, P. BIOMETRICAL JOURNAL, 50, 346-363, 2008. **941 mal zitiert (2015)**