Schätzen und Testen

Aufgabe 1:
Sei $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ ein Zufallsvektor. Die Matrix $\mathbf{X}$ enthält 3 unabhängige Realisationen dieses Zufallsvektors.

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Schätzen Sie die Kovarianzmatrix von $\mathbf{x}$.

Aufgabe 2:
Frets (1921) untersuchte in einer Studie den Zusammenhang zwischen den Kopfgrößen bei männlichen Geschwistern. Dazu wurden in 25 zufällig ausgesuchten Familien die Kopflänge (in mm) von jeweils zwei erwachsenen Söhnen erhoben. Im folgenden werden nur die Variablen

$$x_1 = \text{Kopflänge des ersten Sohnes} \quad \text{und} \quad x_2 = \text{Kopflänge des zweiten Sohnes}$$

betrachtet. Für den kompletten Datensatz ergaben sich folgende empirische Größen

$$\bar{\mathbf{x}} = [185.72, 183.84]^\top$$

und

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 95.293 & 69.661 \\ & 100.807 \end{bmatrix}.$$

a) Testen Sie (zu $\alpha = 0.05$) unter der Annahme $(x_1, x_2)^\top \sim N_2(\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0)$ mit

$$\boldsymbol{\mu}_0 = \begin{bmatrix} 182 \\ 182 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\Sigma}_0 = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}$$

die Hypothese $H_0 : \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$.

b) Testen Sie $H_0 : \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$ bei unbekannter Kovarianzmatrix ($\alpha = 0.05$).

Aufgabe 3:
In einer Studie (Seal (1964), S. 106) wurde die Länge (x_1) und Breite (x_2) des Schädels bei 35 erwachsenen weiblichen Fröschen untersucht. Es ergaben sich folgende Statistiken:

$$\bar{\mathbf{x}}_w = \begin{bmatrix} 22.860 \\ 24.397 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_w = \begin{bmatrix} 17.683 & 20.290 \\ & 24.407 \end{bmatrix}.$$

a) Testen Sie, ob $\boldsymbol{\mu}_w = (20, 25)^\top$ auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0.05$.

b) Äquivalente Messungen wurden bei 14 erwachsenen männlichen Fröschen durchgeführt, mit folgenden Ergebnissen:

$$\bar{\mathbf{x}}_m = \begin{bmatrix} 21.821 \\ 22.843 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_m = \begin{bmatrix} 18.479 & 19.095 \\ & 19.273 \end{bmatrix}.$$

Überprüfen Sie unter der Annahme identischer Kovarianzmatrizen in beiden Subpopulationen, ob $\boldsymbol{\mu}_w = \boldsymbol{\mu}_m$ gilt ($\alpha = 0.05$).

Aufgabe 4:
Mittels einer Studie wird versucht, die Wirksamkeit eines Enzyms nachzuweisen. Dazu werden die Zuckerkonzentration und die Hämoglobinkonzentration vor und nach Gabe des Enzyms gemessen.
Vorher:

$$x_{11} = x_{12} = x_{13} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nachher:

$$x_{21} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, x_{22} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}, x_{23} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Führen Sie zu diesem statistischen Problem einen geeigneten, multivariaten Test zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ durch.