Diskriminanzanalyse

Aufgabe 1: (Fortsetzung zu Aufgabe 3 von Blatt 4)
Die bedingte Verteilung $f(x|y)$ eines dichotomen Merkmals $X \in \{G, S\}$ in zwei Klassen und die a priori-Wahrscheinlichkeiten für die jeweiligen Klassenzugehörigkeiten $Y \in \{1, 2\}$ seien durch die folgende Tabelle bestimmt. Die statistischen Objekte sind Patienten einer Kardiologenpraxis. Ein Patient gehört zur Klasse 1, falls er kein erhöhtes Herzinfarktrisiko hat und zur Klasse 2, falls er ein erhöhtes Risiko hat. Das dichotome Mermal sagt aus, ob das Elektrokardiogramm gut oder schlecht ist.

	Elektrokardiogramm gut G	Elektrokardiogramm schlecht S	a priori-Wahrscheinlichkeiten
Klasse1	0.95	0.05	p
Klasse2	0.10	0.90	$1-p$

a) Bestimmen Sie die ML-Zuordnung. Welche Fehlerraten ergeben sich für die ML-Zuordnungsregel?

b) Es ist schlimmer, einen Patienten mit Risiko als risikofrei zuzuordnen (und daher keine Behandlung anzufangen), als bei einem risikofreien Patienten eine weitere und unnötige Untersuchung durchzuführen. Diese Tatsache berücksichtigt man, in dem Kosten eingeführt werden. Welche Zuordnungen ergeben sich für $p = 0.2$ unter zusätzlicher Berücksichtigung der folgenden Kostentabelle

c_{ij}	1	2
1	0	1
2	5	0

Aufgabe 2:
Eine Bank will bei der Kreditvergabe ihre Kunden nach dem Prinzip der Minimierung der globalen Fehlklassifikationswahrscheinlichkeit in risikobehaftete (Klasse 1) und unbedenkliche (Klasse 2) Kreditnehmer einordnen. Zur Klassifizierung wird ein Bonitätsindex verwendet, von dem angenommen wird, dass er in beiden Klassen normalverteilt ist mit Varianz $\sigma^2 = 200$ und Erwartungswerten $\mu_1 = 25$ in der ersten Klasse und $\mu_2 = 50$ in der zweiten Klasse.

a) Welcher Klasse wird ein potentieller Kreditnehmer mit dem Bonitätsindex 32.2 zugeordnet, wenn die a priori − Wahrscheinlichkeit für die Zugehörigkeit zur Klasse 1 $p(1) = 0.3$ beträgt?

b) Die a priori Wahrscheinlichkeiten der Klassenzugehörigkeit seien nun identisch. Bestimmen Sie die Bereiche des Bonitätsindexes, für die eine Klassifikation in Klasse 1 bzw. Klasse 2 erfolgt.

c) Wie groß muss μ_2 bei identischen a priori Wahrscheinlichkeiten mindestens sein ($\mu_1 = 25$), damit auch ein Kunde mit Bonitätsindex 49.5 noch in Klasse 1 zugeordnet wird?

Aufgabe 3:
Der zweidimensionale Merkmalsvektor $\mathbf{X}$ sei in den Klassen Ω_1, Ω_2 und Ω_3 normalverteilt mit

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}\,|\,Y = 1 &\sim N_2(\boldsymbol{\mu}_1, \Sigma) \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\mu}_1 = (4, 12)^\top, \\
\mathbf{X}\,|\,Y = 2 &\sim N_2(\boldsymbol{\mu}_2, \Sigma) \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\mu}_2 = (12, 8)^\top, \\
\mathbf{X}\,|\,Y = 3 &\sim N_2(\boldsymbol{\mu}_3, \Sigma) \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\mu}_3 = (4, 8)^\top.
\end{aligned}$$

Für die a priori Wahrscheinlichkeiten gelte $p(1) = p(2) = p(3) = 1/3$. Bestimmen Sie unter Anwendung der Bayes-Zuordnungsregel für allgemeines Σ die Trenngeraden zwischen je zwei Klassen, und zeichnen Sie die Klassengebiete für den Fall, dass $\Sigma = \mathrm{I}$ gilt.