Aufgabe 1

Für $\emptyset \subsetneqq A \subsetneqq B \subsetneqq \Omega$ sind $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}$ und $\mathcal{B} = \{\emptyset, B, \bar{B}, \Omega\}$ jeweils σ-Algebren (vgl. Def. 2.7). Zeigen Sie, dass $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ keine σ-Algebra ist.

Aufgabe 2

Sei $\Omega = \{1, 2, ..., 6\}$ und $\mathcal{E} = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{3, 4, 5, 6\}\}$. Bestimmen Sie $\sigma(\mathcal{E})$.

Aufgabe 3

Gegeben sei der Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ mit den Mengen $A = \{-2, 2, \pi\},\ B = \mathbb{Q},\ C = [1, 4] \in \mathcal{B}$.

a) Berechnen Sie das Zählmaß μ_Z und das Lebesguemaß λ für A, B und C.

b) Berechnen Sie die reduzierten Maße $\mu_Z|_{\mathbb{N}}$ und $\lambda|_{[0,1]}$ für A, B und C.

Hinweis: Für ein allgemeines Maß $\mu : \mathcal{F} \to \bar{\mathbb{R}}$ und eine Menge $A \in \mathcal{F}$ ist das reduzierte Maß $\mu|_A$ definiert als $\mu|_A(B) := \mu(A \cap B)\ \forall B \in \mathcal{F}$.

Aufgabe 4

Sei $\Omega = \mathbb{N}$ und $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Für welche μ wird dadurch ein Maßraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ definiert? Welche dieser Maße μ sind endlich?

a) $\mu(A) = \sum\limits_{i \in A} t(1-t)^{i-1}$ für $t \in (0, 1)$

b) $\mu(A) = \begin{cases} 0 & A \text{ ist endlich, } |A| < \infty \\ 1 & A \text{ ist unendlich, sonst} \end{cases}$

c) $\mu(A) = \sum\limits_{i \in A} \frac{1}{i}$

Aufgabe 5

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum mit $A_1, \ldots, A_n \subset \Omega,\ n \in \mathbb{N}$.

a) Beweisen Sie die Siebformel (*Satz 3.3. iii)*):

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \sum_{1 \le j_1 < \ldots < j_i \le n} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{i} A_{j_k}\right).$$

b) Wie groß ist die (Laplace-)Wahrscheinlichkeit, dass eine beliebig gewählte Zahl $n \in \{1, \ldots, 100\}$ durch mindestens eine der Zahlen $2, 3$ oder 5 teilbar ist?