Kapitel 2

Klassische Schätz- und Testtheorie

Grundmodell:

Die Stichprobe $X = (X_1, \ldots, X_n)$ besitzt die Verteilung $\mathbb{P} \in \mathcal{P} = \{\mathbb{P}_\theta : \theta \in \Theta\}, \Theta \subseteq \mathbb{R}^k$, wobei

- θ: k-dimensionaler Parameter
- Θ: Parameterraum
- $k < n$, oft $k \ll n$, mit $\dim(\theta) = k$ fest für asymptotische $(n \to \infty)$-Betrachtungen.
- In der Regel vorausgesetzt: Es existiert Dichte

  $$f(x|\theta) = f(x_1, , \ldots, x_n|\theta) \text{ zu } \mathbb{P}_\theta,$$

  so dass man analog schreiben kann:

  $$\mathcal{P} = \{f(x|\theta) : \ \theta \in \Theta\}.$$

- Klassische Schätz- und Testtheorie für finite (d.h. für festen Stichprobenumfang n) i.i.d.-Stichprobe von besonderer Relevanz; es gilt:

  $$f(x|\theta) = f(x_1|\theta) \cdot \ldots \cdot f(x_n|\theta).$$

- Viele Begriffe, insbesondere der Schätztheorie, jedoch von genereller Bedeutung.
- Literatur: Lehmann & Casella (1998), Lehmann & Romano (2005), Rüger (1999, 2002) Band I+II

Definition 2.1 (Statistik)**.** *Eine* Statistik *ist eine messbare Funktion*

$$T : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \longrightarrow & \mathbb{R}^l \\ x & \longmapsto & T(x). \end{array} \right.$$

Normalerweise ist $l < n$, da mit der Statistik T eine Dimensionsreduktion erzielt werden soll.

Beispiel 2.1.

$\rightarrow$ $T(x)$ *Schätzfunktion*

$\rightarrow$ $T(x)$ *Teststatistik*

2.1 Klassische Schätztheorie

Gesucht: Punkt- oder Bereichsschätzung für θ oder einen transformierten Parametervektor $\tau(\theta)$.

Beispiel 2.2. *$X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ mit $\theta = (\mu, \sigma^2)^\top$. Hier könnte $\tau(\theta) = \mu$ sein (d.h. σ^2 ist Nuisance-Parameter) oder $\tau(\theta) = 1/\sigma^2$ (d.h. die Präzision ist von Interesse).*

Definition 2.2 (Punktschätzung, Schätzer, Schätzfunktion)**.** *Sei*

$$T : \begin{cases} \mathcal{X} & \longrightarrow & \Theta \subseteq \mathbb{R}^k \\ x & \longmapsto & T(x) \end{cases}$$

eine messbare Abbildung. Man bezeichnet mit $T(x)$ den Schätzwert *oder die* Punktschätzung *(zu konkreter Realisation x) und mit $T(X)$ den* Punktschätzer *von θ, der eine Zufallsvariable ist (auch gebräuchlich: $\widehat{\theta}(x)$ oder kurz $\widehat{\theta}$, d.h. notationell wird nicht zwischen Schätzwert und Schätzfunktion unterschieden).*

2.1.1 Suffizienz

Der Begriff der Suffizienz ist von grundlegender Bedeutung in der klassischen parametrischen Inferenz; darüber hinaus ist die Bedeutung (stark) abgeschwächt, vgl. auch Statistik IV.

Definition 2.3. *Eine Statistik T heißt* suffizient *für θ (oder auch für $\mathcal{P}$) $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ die bedingte Verteilung bzw. Dichte von X gegeben $T(x) = t$ ist für alle Werte von $T(x) = t$ von θ unabhängig, d.h.*

$$f_{X|T}(x|T(x) = t, \theta) = f_{X|T}(x|T(x) = t)$$

hängt nicht von θ ab.

Idee: Zusätzliche Information in X, die nicht in T enthalten ist, ist durch $f_{X|T}$ gegeben. Falls $f_{X|T}$ von θ unabhängig ist, dann enthält die Stichprobe x nicht mehr Information über θ als $T(x)$.

Folgender Satz ist äquivalent und konstruktiv:

Satz 2.4 (Faktorisierungssatz, Neyman-Kriterium)**.** *Eine Statistik T ist suffizient für θ genau dann wenn*

$$f(x|\theta) = h(x)g(T(x)|\theta)$$

für fast alle x, d.h. die Dichte lässt sich in zwei Teile faktorisieren, von denen ein Teil von x, aber nicht von θ, und der andere nur von θ und $T(x)$ abhängt.

Beweis.

„$\Rightarrow$": Falls T suffizient ist, gilt:

$$f_{X|T}(x|T(x) = t, \theta) = f_{X|T}(x|T(x) = t) = \frac{f_{X,T}(x, t|\theta)}{f_{T|\theta}(t|\theta)}.$$

Weiterhin ist

$$f_{X,T}(x,t|\theta) = \begin{cases} f_{X|\theta}(x|\theta) & \text{für } T(x)=t \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

d.h.

$$\underbrace{f_{X|T}(x|t)}_{h(x)} \cdot \underbrace{f_{T|\theta}(t|\theta)}_{g(T(x)|\theta)} = f_{X|\theta}(x|\theta).$$

„⇐": Man erhält die Dichte von T, ausgewertet an t, indem man im obigen Faktorisierungskriterium über die x, für die $T(x)=t$ gilt, summiert (bzw. integriert). Im diskreten Fall also:

$$f_{T|\theta}(t|\theta) = \sum_{x:T(x)=t} h(x)g(T(x)|\theta) = g(t|\theta) \sum_{x:T(x)=t} h(x).$$

Damit ist die bedingte Dichte von X gegeben $T=t$,

$$\frac{f_{X|\theta}(x|\theta)}{f_{T|\theta}(t|\theta)} = \frac{h(x)g(T(x)|\theta)}{\sum_{x:T(x)=t} h(x)g(t|\theta)} = \frac{h(x)}{\sum_{x:T(x)=t} h(x)},$$

unabhängig von θ. Im stetigen Fall werden Summen durch Integrale ersetzt; im Detail werden Messbarkeitsbedingungen verwendet. □

Beispiel 2.3 (Bernoulli-Experiment)**.** *Seien* $X_1,\dots,X_n \overset{i.i.d.}{\sim} Bin(1,\pi)$ *und* $Z=\sum_{i=1}^n X_i$ *die Anzahl der Erfolge. Dann ist* Z *suffizient für* π*, denn*

$$\begin{aligned} f_{X|Z}(x|z,\pi) &= \mathbb{P}_\pi(X=x|Z=z) \\ &= \frac{\prod_{i=1}^n \pi^{x_i}(1-\pi)^{1-x_i}}{\binom{n}{z}\pi^z(1-\pi)^{n-z}}, \quad \textit{wobei } \sum_{i=1}^n x_i = z \\ &= \binom{n}{z}^{-1} \end{aligned}$$

ist unabhängig von π*. Gemäß Faktorisierungssatz ist*

$$f(x|\pi) = \underbrace{\frac{1}{\binom{n}{z}}}_{=h(x)} \underbrace{\binom{n}{z}\pi^z(1-\pi)^{n-z}}_{=g(z|\pi)} = \underbrace{1}_{=h^*(x)} \underbrace{\pi^z(1-\pi)^{n-z}}_{=g^*(z|\pi)=f(x|\pi)}.$$

Beispiel 2.4 (Normalverteilung)**.** *Sei* $X=(X_1,\dots,X_n)$ *mit* $X_i \overset{i.i.d.}{\sim} N(\mu,\sigma^2)$ *und* $\theta=(\mu,\sigma^2)^\top$*.*

$$\begin{aligned} f_{X|\theta}(x|\theta) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2\right) \\ &= \underbrace{(2\pi)^{-n/2}}_{h(x)} \underbrace{(\sigma^2)^{-n/2}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\mu\sum_{i=1}^n x_i + n\mu^2\right)\right)}_{g((\sum_{i=1}^n x_i, \sum_{i=1}^n x_i^2)|\theta)}, \end{aligned}$$

d.h. $T(X)=\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i^2\right)$ *ist suffizient für* $\theta=(\mu,\sigma^2)^\top$*. Aber: Die bijektive Transformation* $\widetilde{T}(X)=(\bar{X},S^2)$ *ist auch suffizient für* θ*, wobei* S^2 *die Stichprobenvarianz bezeichnet.*

Beispiel 2.5 (Exponentialverteilung). *Sei* $X = (X_1, \ldots, X_n) \overset{i.i.d.}{\sim} Exp(\lambda)$*, dann*

$$f(x|\lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\lambda) = \underbrace{1}_{h(x)} \cdot \underbrace{\lambda^n \exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i\right)}_{g(T(x)|\lambda)}$$

mit $T(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i$*. Nach der ursprünglichen Definition ist*

$$\frac{f_{X,T|\lambda}(x,t|\lambda)}{f_{T|\lambda}(t|\lambda)} = \frac{\lambda^n \exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{n-1} \exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i\right)} = \frac{\Gamma(n)}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{n-1}},$$

unabhängig von λ*. Dabei wird benutzt, dass die Summe von* n *unabhängigen und identisch exponentialverteilten Zufallsvariablen mit Parameter* λ *gammaverteilt ist mit Parametern* n *und* λ*.*

Beispiel 2.6 (Ordnungsstatistik). *Sei* $X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} f(x|\theta)$ *(wobei* f *stetige Dichte ist) und* $T(X) = X_{(\cdot)} = (X_{(1)}, \ldots, X_{(n)})$ *die Ordnungsstatistik. Dann gilt*

$$f_{X|T,\theta}(x|T = x_{(\cdot)}, \theta) = \frac{1}{n!}.$$

Die Gleichheit folgt aus der Stetigkeit, denn $x_i \neq x_j \ \forall i \neq j$ *(mit Wahrscheinlichkeit 1).* $X_{(\cdot)}$ *ist suffizient für* θ*. Wir haben also bei i.i.d.-Beobachtungen keinen Informationsverlust durch Ordnen der Daten.*

Bemerkung.

- *Offensichtlich ist* $T(X) = X$*, d.h. die Stichprobe selbst, suffizient.*
- *Ebenso ist jede eineindeutige Transformation von* X *oder von einer suffizienten Statistik* $T(X)$ *suffizient.*
- *Ist* T *suffizient, dann auch* (T, T^*)*, wobei* T^* *eine beliebige weitere Statistik darstellt.*

Dies zeigt: Die Dimension einer suffizienten Statistik sollte soweit wie möglich reduziert werden.

Definition 2.5 (Minimalsuffizienz). *Eine Statistik* T *heißt* minimalsuffizient *für* $\theta \overset{def}{\Leftrightarrow}$ T *ist suffizient, und zu jeder anderen suffizienten Statistik* V *existiert eine Funktion* H *mit*

$$T(X) = H(V(X)) \ \ \mathcal{P} - \textit{fast überall.}$$

Frage: Existieren minimalsuffiziente Statistiken? Wenn ja, sind sie eindeutig?

Beispiel 2.7 (Normalverteilung).
Seien $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$*.*

1. $T(X) = \bar{X}$ *ist minimalsuffizient für* μ *bei bekanntem* σ^2*.*
2. $T(X) = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2$ *ist minimalsuffizient für* σ^2 *bei bekanntem* μ*.*

3. $T(X) = \left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i^2\right)$ *ist minimalsuffizient für* μ *und* σ^2*.*

Lemma 2.6. *Sind* T *und* S *minimalsuffiziente Statistiken, dann existieren injektive Funktionen* g_1*,* g_2*, so dass* $T = g_1(S)$ *und* $S = g_2(T)$*.*

Satz 2.7 (Charakterisierung von Minimalsuffizienz durch Likelihood-Quotienten)**.** *Definiere den Likelihood-Quotienten*

$$\Lambda_x(\theta_1, \theta_2) = \frac{f(x|\theta_1)}{f(x|\theta_2)}.$$

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Minimalsuffizienz einer Statistik T *für* θ *ist, dass gilt:*

$$T(x) = T(x') \;\Leftrightarrow\; \Lambda_x(\theta_1, \theta_2) = \Lambda_{x'}(\theta_1, \theta_2) \text{ für alle } \theta_1 \text{ und } \theta_2.$$

Beispiel 2.8 (Suffizienz in Exponentialfamilien)**.** *Die Dichte einer* k*-parametrischen Exponentialfamilie hat die Form*

$$\begin{aligned} f(x|\theta) &= h(x) \cdot c(\boldsymbol{\theta}) \cdot \exp(\gamma_1(\boldsymbol{\theta})T_1(x) + \ldots + \gamma_k(\boldsymbol{\theta})T_k(x)) \\ &= h(x) \cdot \exp(b(\boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\theta})^\top \boldsymbol{T}(x)), \end{aligned}$$

d.h. $\boldsymbol{T}(X) = (T_1(X), \ldots, T_k(X))^\top$ *ist suffizient für* $\boldsymbol{\theta}$ *nach Faktorisierungssatz. Falls* Θ *ein offenes Rechteck in* $\mathbb{R}^k$ *enthält, ist* $\boldsymbol{T}$ *auch minimalsuffizient.*

Es folgt nun die Charakterisierung der Minimalsuffizienz nach Lehmann-Scheffé. Dazu wird der Begriff der Vollständigkeit benötigt.

Definition 2.8. *Eine Statistik* T *ist* vollständig $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ *für jede reelle (messbare) Funktion* g *gilt:*

$$\mathbb{E}_\theta[g(T)] = 0 \;\; \forall\theta \;\Rightarrow\; \mathbb{P}_\theta(g(T) = 0) = 1 \;\forall\theta.$$

Aus der Definiton wird nicht unmittelbar klar, warum „Vollständigkeit" eine wünschenswerte Eigenschaft eines Schätzers sein sollte. Einen möglichen Grund liefert der folgende Satz.

Satz 2.9 (Lehmann-Scheffé)**.** *Angenommen,* X *besitzt eine Dichte* $f(x|\theta)$ *und* $T(X)$ *ist suffizient und vollständig für* θ*. Dann ist* $T(X)$ *minimalsuffizient für* θ*.*

Beweis. Vorausgesetzt wird, dass eine minimalsuffiziente Statistik existiert - bewiesen wurde dies von Lehmann und Scheffé (1950). Ist dies der Fall, so ist diese bis auf bijektive Transformationen eindeutig. Bezeichne $S = g_1(T)$ eine solche minimalsuffiziente Statistik für eine Funktion g_1. Definiere $g_2(S) = \mathbb{E}[T|S]$. Da S suffizient für θ ist, hängt $g_2(S)$ nicht von θ ab. Betrachte nun

$$g(T) = T - g_2(S) = T - g_2(g_1(T)).$$

Anwendung des Satzes von der iterierten Erwartung liefert:

$$\mathbb{E}_\theta[g(T)] = \mathbb{E}_\theta[T] - \mathbb{E}_\theta[\mathbb{E}[T|S]] = 0.$$

Da T vollständig ist, ist $g(T) = 0$ bzw. $g_2(S) = T$ mit Wahrscheinlichkeit 1, d.h. T ist eine Funktion von S. Da S eine Funktion jeder suffizienten Statistik ist, gilt dies damit auch für T und T ist also minimalsuffizient. (S und T sind äquivalent.) □

Bemerkung (Ancillarity einer Statistik)**.** *Eine Statistik $V(X)$ heißt* ancillary *(„Hilfsstatistik") für $\mathcal{P}$, wenn ihre Verteilung nicht von θ abhängt (also bekannt ist).*

Häufiger Sachverhalt: $T = (U, V)$ ist suffizient für θ, V ancillary, U nicht suffizient.

Beispiel 2.9. $X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} U\left[\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2}\right]$. *Man kann dann zeigen (Davison, 2004), dass mit*

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}(X_{(1)} + X_{(n)}) \\ V &= X_{(n)} - X_{(1)} \end{aligned}$$

$T = (U, V)$ suffizient, aber nicht vollständig für θ ist. Ferner ist U alleine nicht suffizient und V ancillary.

2.1.2 Erwartungstreue, Varianz und MSE

- Fehler eines Schätzers $\widehat{\theta} = \widehat{\theta}(X)$ ist $\widehat{\theta} - \theta$.
- Messung des Fehlers durch Verlustfunktion, zum Beispiel

$L(\widehat{\theta}, \theta) = \lvert\widehat{\theta} - \theta\rvert$	Abstand (θ skalar),
$L(\widehat{\theta}, \theta) = \lVert\widehat{\theta} - \theta\rVert^2$	quadratischer Fehler,
$L(\widehat{\theta}, \theta) = \frac{\lVert\widehat{\theta} - \theta\rVert^2}{\lVert\theta\rVert^2}$	relativer quadratischer Fehler,
$L(\widehat{\theta}, \theta) = (\widehat{\theta} - \theta)^\top \boldsymbol{D}(\widehat{\theta} - \theta)$	gewichteter quadratischer Fehler ($\boldsymbol{D}$ positiv definit).

- Risikofunktion $R(\widehat{\theta}, \theta) = \mathbb{E}_\theta[L(\widehat{\theta}, \theta)]$.
- Hier wird (hauptsächlich) quadratischer Verlust betrachtet.

Definition 2.10 (Erwartungstreue, Bias, Varianz eines Schätzers)**.**

- *$\widehat{\theta}$ heißt* erwartungstreu $\overset{def}{\Leftrightarrow} \mathbb{E}_\theta[\widehat{\theta}] = \theta$.
- $\mathrm{Bias}_\theta(\widehat{\theta}) = \mathbb{E}_\theta[\widehat{\theta}] - \theta$.
- $\mathrm{Var}_\theta(\widehat{\theta}) = \mathbb{E}_\theta[(\widehat{\theta} - \mathbb{E}_\theta[\widehat{\theta}])^2]$, *$\theta$ skalar.*

Definition 2.11 (MSE)**.** *Der* mittlere quadratische Fehler (mean squared error) *ist definiert als*

$$\mathrm{MSE}_\theta(\widehat{\theta}) = \mathbb{E}_\theta[(\widehat{\theta} - \theta)^2] = \mathrm{Var}_\theta(\widehat{\theta}) + (\mathrm{Bias}_\theta(\widehat{\theta}))^2.$$

Der Gesamtfehler lässt sich also aufteilen in einen zufälligen Fehler (Varianz) und einen systematischen (quadrierter Bias).

Vergleicht man zwei Schätzer bezüglich ihres MSE, kann für einen Teilbereich von Θ der MSE des einen, für andere Teilbereiche der MSE des zweiten Schätzers kleiner sein:

Beispiel 2.10. $X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} B(1, \pi)$.

1. *MSE von* $\widehat{\pi} = \bar{X}$*:*

$$\mathbb{E}_\pi[(\bar{X} - \pi)^2] = \mathrm{Var}_\pi(\bar{X}) = \frac{\pi(1-\pi)}{n}.$$

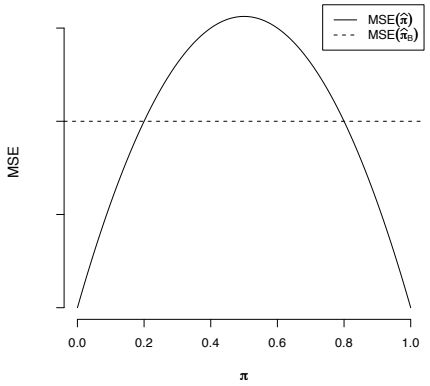
2. *MSE des Bayes-Schätzers (Posteriori-Erwartungswert) bei einer Priori* $p(\pi) \sim Be(\alpha, \beta)$*:*

$$\widehat{\pi}_B = \frac{Y + \alpha}{\alpha + \beta + n}, \quad Y = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

$$\begin{aligned} \mathrm{MSE}(\widehat{\pi}_B) &= \mathrm{Var}_\pi\left(\frac{Y+\alpha}{\alpha+\beta+n}\right) + \left(\mathbb{E}_\pi\left[\frac{Y+\alpha}{\alpha+\beta+n} - \pi\right]\right)^2 \\ &= \frac{n\pi(1-\pi)}{(\alpha+\beta+n)^2} + \left(\frac{n\pi+\alpha}{\alpha+\beta+n} - \pi\right)^2. \end{aligned}$$

Für $\alpha = \beta = \sqrt{n/4}$ *ergibt sich*

$$\mathrm{MSE}_\pi(\widehat{\pi}_B) = \mathbb{E}_\pi[(\widehat{\pi}_B - \pi)^2] = \frac{1}{4}\frac{n}{(n+\sqrt{n})^2} = \textit{const bezüglich } \pi.$$



Fazit: In der Regel wird man keinen „MSE-optimalen" Schätzer $\widehat{\theta}^{\mathrm{opt}}$ finden in dem Sinne, dass $\mathrm{MSE}_\theta(\widehat{\theta}^{\mathrm{opt}}) \leq \mathrm{MSE}_\theta(\widehat{\theta})$ für alle θ und alle konkurrierenden $\widehat{\theta}$. Bei Einschränkung auf erwartungstreue Schätzer ist dies öfter möglich. Deshalb die Forderung:

Definition 2.12 (zulässiger („admissible") Schätzer)**.** *Ein Schätzer* $\widehat{\theta}$ *heißt* zulässig $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ *es gibt keinen Schätzer* $\widetilde{\theta}$ *mit* $\mathrm{MSE}_\theta(\widetilde{\theta}) \leq \mathrm{MSE}_\theta(\widehat{\theta})$ *für alle* θ *und* $\mathrm{MSE}_\theta(\widetilde{\theta}) < \mathrm{MSE}_\theta(\widehat{\theta})$ *für mindestens ein* θ*, d.h. es gibt keinen Schätzer* $\tilde{\theta}$*, der* $\hat{\theta}$ *gleichmäßig/strikt „dominiert".*

Definition 2.13 (Verallgemeinerungen des MSE auf $\theta \in \mathbb{R}^p, p > 1$)**.** *Üblich sind die folgenden zwei Alternativen:*

1. *MSE (skalar):*

$$\begin{aligned} \mathrm{MSE}_\theta^{(1)}(\widehat{\theta}) &= \mathbb{E}_\theta[\|\widehat{\theta} - \theta\|^2] \\ &= \sum_{j=1}^{p} \mathbb{E}_\theta[(\widehat{\theta}_j - \theta_j)^2] \\ &= \sum_{j=1}^{p} \mathrm{MSE}_\theta(\widehat{\theta}_j) \end{aligned}$$

2. *MSE-Matrix:*

$$\begin{aligned} \mathrm{MSE}_\theta^{(2)}(\widehat{\theta}) &= \mathbb{E}_\theta[(\widehat{\theta} - \theta)(\widehat{\theta} - \theta)^\top] \\ &= \mathrm{Cov}_\theta(\widehat{\theta}) + (\mathbb{E}_\theta[\widehat{\theta}] - \theta)(\mathbb{E}_\theta[\widehat{\theta}] - \theta)^\top \end{aligned}$$

Diese Variante wird häufig bei linearen Modellen betrachtet.

Bemerkung. *Das j-te Diagonalelement der MSE-Matrix ist* $\mathrm{MSE}_\theta(\widehat{\theta}_j)$*. Vergleich von MSE-Matrizen gemäß* „Löwner"-Ordnung*:*

$$\mathrm{MSE}_\theta(\widetilde{\theta}) \overset{(\leq)}{<} \mathrm{MSE}_\theta(\widehat{\theta})$$

bedeutet, dass die Differenz $\mathrm{MSE}_\theta(\widehat{\theta}) - \mathrm{MSE}_\theta(\widetilde{\theta})$ *positiv (semi-)definit ist. Man definiert allgemein für symmetrische $(p \times p)$-Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B}$:*

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \leq \mathbf{B} &\overset{def}{\Leftrightarrow} \mathbf{B} - \mathbf{A} \text{ ist positiv semidefinit,} \\ \mathbf{A} < \mathbf{B} &\overset{def}{\Leftrightarrow} \mathbf{B} - \mathbf{A} \text{ ist positiv definit.} \end{aligned}$$

Beispiel 2.11 (Gauß-Experiment)**.** *Seien* $X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$*.*

- σ^2 *bekannt,* μ *unbekannt: MSE-Vergleich von* $\bar{X}$ *und* $T = b\bar{X} + a$*.*
- σ^2 *unbekannt,* μ *bekannt:*
  - *Eine Möglichkeit:*

$$S_\mu^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2,\ \mathbb{E}_{\sigma^2}(S_\mu^2) = \sigma^2$$

  - *Weitere Möglichkeit:*

$$V_\mu^2 = \frac{1}{n+2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2, \mathbb{E}_{\sigma^2}(V_\mu^2) = \frac{n}{n+2}\sigma^2$$

Es stellt sich heraus, dass $\mathrm{MSE}_{\sigma^2}(V_\mu^2) < \mathrm{MSE}_{\sigma^2}(S_\mu^2)$ *ist.*

- *μ und σ^2 unbekannt:*
  - *Eine Möglichkeit:*
$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2,$$
$$\mathbb{E}_{\sigma^2}(S^2) = \sigma^2, \;\; \mathrm{MSE}_{\sigma^2}(S^2) = \mathrm{Var}_{\sigma^2}(S^2) = \frac{2}{n-1}\,\sigma^4.$$
  - *Weitere Möglichkeit:*
$$V^2 = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2,$$
$$\mathbb{E}_{\sigma^2}(V^2) = \frac{n-1}{n+1}\,\sigma^2, \; \mathrm{MSE}_{\sigma^2}(V^2) = \frac{2}{n+1}\,\sigma^4,$$
    d.h. V^2 dominiert S^2.
  - *Der sogenannte* Stein-Schätzer
$$T = \min\left\{V^2, \frac{1}{n+2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right\}$$
    dominiert V^2 (und damit S^2). Plausibilitätsbetrachtung: Ist $\mu = 0$, so ist $\sum_{i=1}^n X_i^2/(n+2)$ besserer Schätzer als V^2. Ist $\mu \neq 0$, so ist V^2 ein besserer Schätzer als $\sum_{i=1}^n X_i^2/(n+2)$. Beim Stein-Schätzer wird fallweise mit hoher Wahrscheinlichkeit der jeweils bessere Schätzer benutzt.

Beispiel 2.12 (Steins Paradoxon)**.** *Seien $(X_1, \ldots, X_m)^\top \sim N_m(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2 \boldsymbol{I}_m)$ multivariat normalverteilt mit $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_m)^\top$ und σ^2 bekannt. Es sollen simultan die Erwartungswerte $\mu_1, \ldots, \mu_m$ geschätzt werden. Man beachte dabei, dass die einzelnen Komponenten als unabhängig angenommen werden. Die Stichprobe hat die Form*
$$X_{11}, \ldots, X_{1n_1}, \ldots, X_{m1}, \ldots, X_{mn_m}$$
(i.i.d. Stichproben aus „Gruppen" $1, \ldots, m$). Übliche Schätzer:
$$T_j = \bar{X}_j, \quad j = 1, \ldots, m, \qquad \boldsymbol{T} = (T_1, \ldots, T_m)^\top = (\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_m)^\top.$$
Der (skalare) MSE ist:
$$\mathbb{E}_\mu[\|\boldsymbol{T} - \boldsymbol{\mu}\|^2] = \sum_{j=1}^{m} \mathbb{E}_\mu[(\bar{X}_j - \mu_j)^2] = \sum_{j=1}^{m} \frac{\sigma_j^2}{n_j}.$$
Paradoxerweise gilt:

1. *Für $m \leq 2$ ist $\boldsymbol{T}$ zulässig.*
2. *Für $m \geq 3$ ist $\boldsymbol{T}$* nicht *zulässig und wird dominiert durch den Stein-Schätzer*
$$\boldsymbol{T}^* = \left(1 - \frac{(m-2)\sigma^2}{\sum_{j=1}^m n_j \bar{X}_j^2}\right)\boldsymbol{T}.$$

Es lässt sich zeigen: T^* ist selbst unzulässig. Der Stein-Schätzer ist ein sogenannter Shrinkage-Schätzer.

Beispiel 2.13 (Lineares Modell)**.**

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} \sim (N)(\mathbf{0}, \sigma^2 \boldsymbol{I})$$

$$\begin{aligned} &\textit{KQ-Schätzer:} && \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{KQ} = (\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X})^{-1} \boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{y} \\ &\textit{Ridge-Schätzer:} && \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{Ridge} = (\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X} + \lambda \mathbf{D})^{-1} \boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{y}, \end{aligned}$$

wobei $\boldsymbol{D}$ eine Diagonalmatrix mit positiven Diagonalelementen ist. Für einen MSE-Vergleich siehe Übung.

Fazit: Bereits im einfachen Beispiel der Schätzung von π in $B(1, \pi)$ (siehe Beispiel 2.10) zeigt sich, dass es im Allgemeinen keine MSE-optimalen Schätzer gibt.

Auswege:

1. Einschränkung auf Teilklasse von Schätzern, zum Beispiel erwartungstreue (und lineare) Schätzer, äquivariante Schätzer, ...
2. MSE-Kriterium verändern:
   - Ersetze $\mathrm{MSE}_\theta(\widehat{\theta})$ durch Minimierung von $\max_{\theta \in \Theta} \mathrm{MSE}_\theta(\widehat{\theta})$ (Minimax-Kriterium)
   - oder ersetzte $\mathrm{MSE}_\theta(\widehat{\theta})$ durch $\mathbb{E}_{p(\theta)}[\mathrm{MSE}_\theta(\widehat{\theta})]$ bei einer Priori-Verteilung $p(\theta)$ (Bayes-Schätzer).

Hier: Strategie 1 mit erwartungstreuen Schätzern, vgl. 2.1.4.

2.1.3 Fisher-Information und Suffizienz

Definition 2.14 (Fisher-reguläre Verteilungsfamilien)**.** *Eine Familie von Verteilungen $\mathcal{P}_\theta$ mit Dichte $f(x|\theta) = f(x_1, \ldots, x_n|\theta)$, $\theta \in \Theta$, heißt* Fisher-regulär*, wenn Folgendes gilt:*

1. *Der Träger $\{x \in \mathcal{X} : f(x|\theta) > 0\}$ ist unabhängig von θ (dies ist zum Beispiel bei $X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} U[0; \theta]$ oder bei der Pareto-Verteilung verletzt).*
2. *Θ ist offen in $\mathbb{R}^p$ (verletzt zum Beispiel bei $\sigma^2 \geq 0$).*
3. *Die ersten und zweiten Ableitungen von $f(x|\theta)$ bzgl. θ existieren und sind für jedes θ endliche Funktionen von x.*
4. *Vertauschbarkeit: Sowohl für $f(x|\theta)$ als auch für $\log(f(x|\theta))$ kann erstes und zweites Differenzieren nach θ und Integration über x vertauscht werden.*

Definition 2.15 (Log-Likelihood, Scorefunktion und Information)**.**

$$\begin{aligned}
\ell(\theta;x) &= \log f(x|\theta) \quad (\text{Log-Likelihood } \textit{von } \theta \textit{ bzgl. der Stichprobe } x)\\
s(\theta;x) &= \frac{\partial}{\partial\theta}\ell(\theta;x) = \left(\frac{\partial}{\partial\theta_1}\ell(\theta;x),\ldots,\frac{\partial}{\partial\theta_p}\ell(\theta;x)\right)^\top \quad (\text{Score-Funktion})\\
J(\theta;x) &= -\frac{\partial^2\ell(\theta;x)}{\partial\theta\partial\theta^\top} \quad (\text{beobachtete Informationsmatrix } \textit{der Stichprobe mit Elementen}\\
&\qquad (J(\theta;x))_{ij} = -\frac{\partial^2\log f(x|\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\Big)\\
I(\theta) &= \mathrm{E}_\theta[J(\theta;X)] \quad (\text{erwartete } \textit{oder} \text{ Fisher-Informationsmatrix})
\end{aligned}$$

Satz 2.16. *Ist $\mathcal{P}_\theta$ Fisher-regulär, so gilt:*

1. $\mathbb{E}_\theta\left[s(\theta;X)\right] = 0$
2. $\mathbb{E}_\theta\left[-\frac{\partial^2\ell(\theta;X)}{\partial\theta\partial\theta^\top}\right] = \mathrm{Cov}_\theta(s(\theta;X))$

Beweis.
Zu 1.:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\theta[s(\theta;X)] &= \int s(\theta;x)f(x|\theta)\,dx\\
&= \int \frac{\partial}{\partial\theta}\log(f(x|\theta))f(x|\theta)\,dx\\
&= \int \frac{\frac{\partial}{\partial\theta}f(x|\theta)}{f(x|\theta)}f(x|\theta)dx\\
&= \frac{\partial}{\partial\theta}\int f(x|\theta)dx = 0
\end{aligned}$$

Zu 2.:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\theta\left[-\frac{\partial^2\ell(\theta;X)}{\partial\theta\partial\theta^\top}\right] &= -\mathbb{E}_\theta\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\frac{\partial}{\partial\theta^\top}f(X|\theta)}{f(X|\theta)}\right)\right]\\
&= -\mathbb{E}_\theta\left[\frac{f(X|\theta)\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\theta^\top}f(X|\theta) - (\frac{\partial}{\partial\theta}f(X|\theta))(\frac{\partial}{\partial\theta^\top}f(X|\theta))}{f(X|\theta)^2}\right]
\end{aligned}$$

unter Verwendung der Quotientenregel der Differentiation. Dies ist gleich

$$\begin{aligned}
&- \mathbb{E}_\theta\left[\frac{\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\theta^\top}f(X|\theta)}{f(X|\theta)}\right] + \mathbb{E}_\theta\left[\frac{\frac{\partial}{\partial\theta}f(X|\theta)}{f(X|\theta)}\cdot\frac{\frac{\partial f(X|\theta)}{\partial\theta^\top}}{f(X|\theta)}\right]\\
= &- \int\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\theta^\top}f(x|\theta)dx + \mathbb{E}_\theta[s(\theta;X)s(\theta;X)^\top]
\end{aligned}$$

Der erste Summand ist unter Vertauschung von Differentiation und Integration gleich null. Für den zweiten Teil ergibt sich mit Teil 1.

$$\mathbb{E}[s(\theta;X)s(\theta;X)^\top] = \mathrm{Cov}_\theta(s(\theta;X)).$$

□

Weitere Eigenschaften:

- Sind $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und gemäß $X_i \sim f_i(x|\theta)$, $i = 1, \ldots, n$, verteilt, so gilt:

$$\begin{aligned} \ell(\theta) &= \sum_{i=1}^{n} \ell_i(\theta) \quad , \quad \ell_i(\theta) = \log f_i(x_i|\theta) \\ s(\theta) &= \sum_{i=1}^{n} s_i(\theta) \quad , \quad s_i(\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \log f_i(x_i|\theta) \\ J(\theta) &= -\frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \theta \partial \theta^\top} = \sum_{i=1}^{n} -\frac{\partial^2 \log f_i(x_i|\theta)}{\partial \theta \partial \theta^\top} \end{aligned}$$

- Für $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. wie $X_1 \sim f_1(x|\theta)$ folgt

$$I(\theta) = \mathbb{E}_\theta[J(\theta)] = n \cdot i(\theta),$$

  wobei

$$i(\theta) = \mathbb{E}_\theta \left[-\frac{\partial^2 \ell_1(\theta; X)}{\partial \theta \partial \theta^\top} \right] = \mathrm{Cov}_\theta \left(\frac{\partial \log f_1(X|\theta)}{\partial \theta} \right)$$

  die erwartete Information einer Einzelbeobachtung ist, d.h. die erwartete Informationsmatrix der Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ ist die n-fache erwartete Information einer (typischen) Stichprobenvariable X_1.

- Für eine Statistik $T = T(X), X = (X_1, \ldots, X_n)^\top$ mit $T \sim f_T(t|\theta)$ kann man die Begriffe Score-Funktion und Fisher-Information völlig analog definieren. Insbesondere ist

$$I_T(\theta) = \mathbb{E}_\theta \left[-\frac{\partial^2 \log f_T(t|\theta)}{\partial \theta \partial \theta^\top} \right].$$

Satz 2.17 (Suffizienz und Fisher-Information)**.** *Sei $I(\theta)$ die Fisher-Information für X. Dann gilt unter Fisher-Regularität für jede Statistik T:*

1. *$I_T(\theta) \leq I(\theta)$.*
2. *$I_T(\theta) = I(\theta) \Leftrightarrow T$ ist suffizient für θ.*

Also: Bei einer suffizienten Statistik T wird keine (erwartete) Information „verschenkt".

2.1.4 Erwartungstreue Schätzer

- „Schöne" Resultate für finites n, aber für vergleichsweise einfache statistische Modelle.
- Problem: Für komplexere Modelle existieren keine „vernünftigen" erwartungstreuen Schätzer.
- Aber: Etliche Resultate besitzen allgemeine Eigenschaften für $n \to \infty$.

Informationsungleichungen

I. $\theta \in \mathbb{R}$ (skalar). Neben θ werden auch transformierte Parameter $\tau(\theta)$ betrachtet. Wenn Ableitungen benötigt werden, nehmen wir stillschweigend an, dass sie existieren.

Satz 2.18. *Sei $f(x|\theta)$ Fisher-regulär.*

1. Ist $\widehat{\theta}$ erwartungstreu für θ, so gilt:

$$\mathrm{Var}_\theta(\widehat{\theta}) \geq \frac{1}{I(\theta)} \qquad \textit{(Cramer-Rao-Ungleichung).}$$

2. Ist $T = T(x)$ erwartungstreu für $\tau(\theta)$, so gilt:

$$\mathrm{Var}_\theta(T) \geq \frac{(\tau'(\theta))^2}{I(\theta)}.$$

$\frac{(\tau'(\theta))^2}{I(\theta)}$ *heißt* Cramer-Rao-Schranke.

3. Besitzt $\widehat{\theta}$ den Bias $B(\theta) = \mathbb{E}_\theta[\widehat{\theta}] - \theta$, so gilt

$$\mathrm{MSE}_\theta(\widehat{\theta}) \geq B^2(\theta) + \frac{(1 + B'(\theta))^2}{I(\theta)}.$$

Beweis. Gezeigt wird 2. Daraus folgt 1. für $\tau(\theta) = \theta$ und 3. für $\tau(\theta) = \theta + B(\theta)$. Differentiation von

$$\tau(\theta) = \mathbb{E}_\theta[T] = \int T(x) f(x|\theta)\, dx$$

bezüglich θ, und Verwendung der Fisher-Regularität liefert:

$$\begin{aligned} \tau'(\theta) &= \int T(x) \frac{d}{d\theta} f(x|\theta)\, dx \\ &= \int T(x) s(\theta; x) f(x|\theta)\, dx \\ &= \mathrm{Cov}_\theta(T(X), s(\theta; X)). \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\mathrm{Cov}(U, V)| \leq \sqrt{\mathrm{Var}(U)}\sqrt{\mathrm{Var}(V)}$$

folgt

$$\begin{aligned}(\tau'(\theta))^2 &\leq \mathrm{Var}_\theta(T(X))\mathrm{Var}_\theta(s(\theta;X)) \\ &= \mathrm{Var}_\theta(T(X))I(\theta).\end{aligned}$$

Also:

$$\mathrm{Var}_\theta(T(X)) \geq \frac{(\tau'(\theta))^2}{I(\theta)}.$$

□

Bemerkung. *Die Gleichheit wird genau dann angenommen, wenn eine einparametrische Exponentialfamilie $f(x|\theta) = h(x)\exp(b(\theta) + \gamma(\theta)T(x))$ vorliegt. In diesem Fall ist $T(x)$ ein effizienter Schätzer für seinen Erwartungswert $\tau(\theta) = -b'(\theta)/\gamma'(\theta)$. Also: eher eine kleine Modellklasse.*

II. $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_p)$ bzw. $\boldsymbol{\tau}(\theta)$ mehrdimensional.

Satz 2.19. *Sei $f(x|\theta)$ Fisher-regulär.*

1. *Ist $\widehat{\theta}$ erwartungstreu für θ, so gilt:*

$$\mathrm{Cov}_\theta(\widehat{\theta}) \geq \boldsymbol{I}^{-1}(\theta),$$

wobei sich das „$\geq$" auf die Löwner-Ordnung bezieht (vergleiche Seite 27). Daraus folgt insbesondere $\mathrm{Var}_\theta(\widehat{\theta}_j) \geq v_{jj}$, $j = 1, \ldots, p$, wobei v_{jj} das j-te Diagonalelement von $\boldsymbol{I}^{-1}(\theta)$ bezeichnet.

2. *Ist $\boldsymbol{T}$ erwartungstreu für $\boldsymbol{\tau}(\theta)$, so gilt*

$$\mathrm{Cov}_\theta(\boldsymbol{T}) \geq \boldsymbol{H}(\theta)\boldsymbol{I}^{-1}(\theta)\boldsymbol{H}(\theta)^\top$$

mit der Funktionalmatrix $(\boldsymbol{H}(\theta))_{ij} = \frac{\partial}{\partial\theta_j}\tau_i(\theta)$. Die Matrix $\boldsymbol{H}(\theta)\boldsymbol{I}^{-1}(\theta)\boldsymbol{H}(\theta)^\top$ ist die Cramer-Rao-Schranke.

Bemerkung. *Obige Bemerkung für skalares θ gilt analog für*

$$f(x|\theta) = h(x)\exp(b(\theta) + \boldsymbol{\gamma}^\top(\theta)\boldsymbol{T}(x)),$$

d.h. für mehrparametrische Exponentialfamilien.

Beispiel 2.14 (Cramer-Rao-Schranke bei $X \sim N(\mu, \sigma^2)$)**.** *$X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. wie $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\theta = (\mu, \sigma^2)$. Dann gilt für die Informationsmatrix*

$$I(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{n}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{n}{2\sigma^4} \end{pmatrix} \quad \textit{bzw.} \quad I^{-1}(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\sigma^2}{n} & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma^4}{n} \end{pmatrix}.$$

Beste erwartungstreue Schätzer

Erwartungstreue Schätzer minimaler Varianz innerhalb einer vorgegebenen Klasse nennt man *effizient*. Die Informationsungleichungen motivieren:

Definition 2.20 (Gleichmäßig bester erwartungstreuer (UMVU) Schätzer)**.**

1. *θ skalar:*

   Der Schätzer $\widehat{\theta}_{\mathit{eff}}$ für θ heißt gleichmäßig bester erwartungstreuer *oder* UMVU („uniformly minimum variance unbiased")-Schätzer $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ *$\widehat{\theta}_{\mathit{eff}}$ ist erwartungstreu, und es gilt $\mathrm{Var}_\theta(\widehat{\theta}_{\mathit{eff}}) \leq \mathrm{Var}_\theta(\widehat{\theta})$ für alle θ und jeden erwartungstreuen Schätzer $\widehat{\theta}$.*

2. *θ mehrdimensional:*

   Ersetze in 1. $\mathrm{Var}_\theta(\widehat{\theta}_{\mathit{eff}}) \leq \mathrm{Var}_\theta(\widehat{\theta})$ *durch* $\mathrm{Cov}_\theta(\widehat{\theta}_{\mathit{eff}}) \leq \mathrm{Cov}_\theta(\widehat{\theta})$.

Satz 2.21 (Effizienz und Informationsungleichungen)**.** *Sei $f(x|\theta)$ Fisher-regulär und $\widehat{\theta}$ erwartungstreu für θ. Falls $\mathrm{Cov}_\theta(\widehat{\theta}) = I^{-1}(\theta)$ für alle θ, so ist $\widehat{\theta}$ ein UMVU-Schätzer.*

Beweis. Die Aussage folgt direkt aus der Informationsungleichung und obiger Definition. □

Beispiel 2.15 (Gauß-Experiment)**.** *Seien $X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ mit μ, σ^2 unbekannt. Aus Beispiel 2.14 wissen wir, dass $I(\mu) = n/\sigma^2$ und somit $I^{-1}(\mu) = \sigma^2/n = \mathrm{Var}(\bar{X})$. Dann ist $\bar{X}$ UMVU für μ. Aber*

$$\mathrm{Var}(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1} > \frac{2\sigma^4}{n} = \boldsymbol{I}^{-1}(\sigma^2).$$

Die Cramer-Rao-Schranke wird also nicht erreicht, somit kann nicht gefolgert werden, dass S^2 UMVU für σ^2 ist.

Beispiel 2.16 (Lineares Modell)**.**

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon},\ \boldsymbol{\varepsilon} \sim\ N(\boldsymbol{0}, \sigma^2 I) \quad \textit{bzw.} \quad \boldsymbol{y}\ \sim\ N(\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 I)$$

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{KQ} &= \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{ML} = (\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{X})^{-1} \boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{y} \textit{ ist effizient für } \boldsymbol{\beta}, \\ \widehat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n-p} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \widehat{y}_i)^2 \textit{ ist UMVU-Schätzer für } \sigma^2. \end{aligned}$$

Bemerkung. *Zu unterscheiden sind folgende Situationen:*

1. *Es existiert ein UMVU-Schätzer, dessen Varianz gleich der Cramer-Rao-Schranke ist.*
2. *Es existiert ein UMVU-Schätzer, dessen Varianz größer als die Cramer-Rao-Schranke ist (findet man mit dem Satz von Lehmann-Scheffé, siehe Satz 2.23).*
3. *Der häufigste Fall: Es existiert (für finiten Stichprobenumfang) kein UMVU-Schätzer.*

Fazit: Finite Theorie erwartungstreuer Schätzer ist von eingeschränkter Anwendungsrelevanz.

Aber: Es existiert eine analoge asymptotische Theorie mit breiter Anwendungsrelevanz, die sich an finiter Theorie orientiert (siehe Abschnitt 2.1.5).

Zur Konstruktion von UMVU-Schätzern sind folgende zwei Aussagen nützlich:

Satz 2.22 (Rao-Blackwell). *Sei $T = T(X)$ suffizient für θ bzw. $\mathcal{P}_\theta$ und $\widehat{\theta}$ erwartungstreu für θ. Für den Schätzer*

$$\widehat{\theta}_{RB} = \mathbb{E}_\theta[\widehat{\theta}|T] \quad (\text{„Rao-Blackwellization"})$$

gilt:

1. *$\widehat{\theta}_{RB}$ ist erwartungstreu für θ.*
2. $\mathrm{Var}_\theta(\widehat{\theta}_{RB}) \leq \mathrm{Var}_\theta(\widehat{\theta})$.
3. *In 2. gilt die Gleichheit, wenn $\widehat{\theta}$ nur von T abhängt, d.h. $\widehat{\theta}_{RB} = \widehat{\theta}$ mit Wahrscheinlichkeit 1.*

Satz 2.23 (Lehmann-Scheffé). *Ist $T = T(X)$ suffizient und vollständig (also minimalsuffizient) und $\widehat{\theta} = \widehat{\theta}(x)$ ein erwartungstreuer Schätzer, so ist*

$$\widehat{\theta}^* = \mathbb{E}_\theta[\widehat{\theta}|T]$$

der mit Wahrscheinlichkeit 1 eindeutig bestimmte UMVU-Schätzer für θ.

2.1.5 Asymptotische Eigenschaften und Kriterien

Wichtige Schätzer (Momentenschätzer, Shrinkage-Schätzer, ML- und Quasi-ML-Schätzer etc.) sind im Allgemeinen nicht erwartungstreu, besitzen aber günstige asymptotische ($n \to \infty$) Eigenschaften. Im Folgenden sei

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$$

Schätzer für θ.

Definition 2.24 (Asymptotische Erwartungstreue). *$\widehat{\theta}_n$ heißt* asymptotisch erwartungstreu $\overset{def}{\Leftrightarrow}$

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}_\theta[\widehat{\theta}_n] = \theta \quad \textit{für alle } \theta.$$

Definition 2.25 (Konsistenz).

1. *$\widehat{\theta}_n$ ist* (schwach) konsistent *für θ (in Zeichen: $\widehat{\theta}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta$ (für alle θ))* $\overset{def}{\Leftrightarrow}$

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}_\theta(|\widehat{\theta}_n - \theta| \leq \varepsilon) = 1 \quad \textit{für alle } \varepsilon > 0 \textit{ und alle } \theta.$$

2. *$\widehat{\theta}_n$ heißt* MSE-konsistent *für θ* $\overset{def}{\Leftrightarrow}$

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{MSE}_\theta(\widehat{\theta}_n) = 0 \quad \textit{für alle } \theta.$$

3. *$\widehat{\theta}_n$ ist* stark konsistent *für θ* $\overset{def}{\Leftrightarrow}$

$$\mathbb{P}_\theta\left(\lim_{n \to \infty} \widehat{\theta}_n = \theta\right) = 1 \quad \textit{für alle } \theta.$$

Bemerkung.

1. *Aus der (verallgemeinerten) Tschebyscheff-Ungleichung folgt*

$$\widehat{\theta}_n \text{ MSE-konsistent } \Rightarrow \widehat{\theta}_n \text{ schwach konsistent.}$$

2. *Wegen* $\mathrm{MSE}_\theta(\widehat{\theta}_n) = \mathrm{Var}_\theta(\widehat{\theta}_n) + (\mathrm{Bias}_\theta(\widehat{\theta}_n))^2$ *folgt:*

$$\widehat{\theta}_n \text{ ist MSE-konsistent } \Leftrightarrow \mathrm{Var}_\theta(\widehat{\theta}_n) \to 0 \text{ und } \mathrm{Bias}_\theta(\widehat{\theta}_n) \to 0 \text{ für alle } \theta.$$

3. *Ist* $\widehat{\theta}_n$ *konsistent für* θ *und* g *eine stetige Abbildung, so ist auch* $g(\widehat{\theta}_n)$ *konsistent für* $g(\theta)$ *(Continuous Mapping Theorem/Stetigkeitssatz).*

4. *Konsistenznachweise bestehen in der Regel in der Anwendung (schwacher) Gesetze großer Zahlen (für i.i.d. Variablen; i.n.i.d. Variablen; abhängige Variablen, z.B. Martingale, Markov-Prozesse, ...).*

Beispiel 2.17.

1. $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ *ist wegen* $\mathbb{E}(\bar{X}_n) = \mu$ *und* $\mathrm{Var}(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n} \to 0$ *für* $n \to \infty$ *konsistent.*

2. $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$ *und* $\widetilde{S}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$ *sind MSE-konsistent für* σ^2.

3. *Mit* $g(x) = \sqrt{x}$ *folgt, dass*

$$S_n = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2} \quad \text{und} \quad \widetilde{S}_n = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}$$

   konsistent sind für σ.

4. $S_n^2/\bar{X}_n$ *ist konsistent für* σ^2/μ *für* $\mu > 0$, *da mit* $\theta = (\mu, \sigma)$ *und* $g(\theta) = \sigma^2/\mu$ *wieder der Stetigkeitssatz benutzt werden kann.*

5. $\widehat{\pi}_n$ *ist konsistent für* π *(im Bernoulli-Experiment).*

6. $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{KQ}, \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{Ridge}$ *sind konsistent für* $\boldsymbol{\beta}$ *im linearen Modell unter gewissen schwachen Annahmen an* $\boldsymbol{X}$, *siehe Beispiel 2.19.*

Asymptotische Normalität

Viele Schätzer (KQ-, Momenten-, ML-, Quasi-ML-, Bayes-Schätzer) sind unter Regularitätsannahmen asymptotisch normalverteilt. Informell ausgedrückt heißt das: Für große n ist $\widehat{\theta}_n$ nicht nur approximativ erwartungstreu, sondern zusätzlich approximativ normalverteilt, kurz

$$\widehat{\theta}_n \overset{a}{\sim} N(\theta, V(\theta))$$

mit (approximativer) Kovarianzmatrix

$$\mathrm{Cov}_\theta(\widehat{\theta}_n) \overset{a}{\sim} V(\theta),$$

die durch

$$\widehat{\mathrm{Cov}}_\theta(\widehat{\theta}_n) := V(\widehat{\theta}_n)$$

geschätzt wird. In der Diagonalen von $V(\widehat{\theta}_n)$ stehen dann die (geschätzten) Varianzen

$$\widehat{\mathrm{Var}}(\widehat{\theta}_j) = v_{jj}(\widehat{\theta}_n)$$

der Komponenten $\theta_j, j = 1, \ldots, p$, von θ.

$\Rightarrow$ "Üblicher" Output statistischer Software ist

$$\underbrace{\widehat{\theta}_j}_{\text{Schätzer}} \quad \underbrace{\widehat{\sigma}_{\widehat{\theta}_j} = \sqrt{v_{jj}(\widehat{\theta})}}_{\text{Standardfehler}} \quad \underbrace{\mathrm{t}}_{\text{t-Statistik}} \quad \underbrace{\mathrm{p}}_{\text{p-Wert}}$$

Beispiel 2.18. *Seien* $X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} F(x|\theta)$ *mit* $\mathbb{E}(X_i) = \mu$ *und* $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2$. *Aber* F *sei* nicht *gleich* Φ, *sondern z.B. die Verteilungsfunktion von* $B(\pi)$ *oder* $Po(\lambda)$. *Für* $\bar{X}_n$ *gilt*

$$\mathbb{E}(\bar{X}_n) = \mu \text{ und } \mathrm{Var}(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Aufgrund des zentralen Grenzwertsatzes folgt

$$\bar{X}_n \overset{a}{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right),$$

zum Beispiel

$$\bar{X}_n \overset{a}{\sim} N\left(\pi, \frac{\pi(1-\pi)}{n}\right) \quad \text{bei } B(\pi).$$

Genauere Formulierung:

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2) \quad \text{für } n \to \infty,$$

im Beispiel also

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \pi) \xrightarrow{d} N(0, \pi(1-\pi)) \quad \text{für } n \to \infty$$

bzw.

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n} & \xrightarrow{d} & N(0,1), \\ \frac{\bar{X}_n - \pi}{\sqrt{\pi(1-\pi)}}\sqrt{n} & \xrightarrow{d} & N(0,1). \end{array}\right\} \quad \begin{array}{c} \text{zentraler} \\ \text{Grenzwertsatz} \end{array}$$

Die $\sqrt{n}$-Normierung ist vor allem bei i.i.d. Stichprobenvariablen geeignet. Für nicht identisch verteilte Stichprobenvariablen wie zum Beispiel $y_1|x_1, \ldots, y_n|x_n$ in Regressionssituationen benötigt man bei $\sqrt{n}$-Normierung Voraussetzungen, die (teilweise) unnötig restriktiv sind. Besser ist dann eine „Matrix-Normierung" mit Hilfe einer „Wurzel" $\boldsymbol{I}^{\frac{1}{2}}(\theta)$ der Informationsmatrix.

Einschub: Wurzel einer positiv definiten Matrix

- $\boldsymbol{A}$ ist positiv definit, wenn $\boldsymbol{A}$ symmetrisch ist und $\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0$ für alle $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ gilt.
- Dann heißt eine Matrix $\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}$ *(linke) Wurzel* von $\boldsymbol{A} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

$$\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}} \underbrace{(\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}})^\top}_{=\boldsymbol{A}^{\frac{\top}{2}}, \text{ rechte Wurzel}} = \boldsymbol{A}.$$

  Allerdings ist $\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}$ nicht eindeutig, da für eine beliebige orthogonale Matrix $\boldsymbol{Q}$ auch $\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{Q}$ eine linke Wurzel ist:

$$\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{Q})^\top = \boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}} \underbrace{\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^\top}_{=\boldsymbol{I}} \boldsymbol{A}^{\frac{\top}{2}} = \boldsymbol{A}.$$

- Zwei gebräuchliche Wurzeln sind:
  1. **Symmetrische Wurzel:** Betrachte die Spektralzerlegung von $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{p\times p}$. Mit der Matrix $\boldsymbol{P} \in \mathbb{R}^{p\times p}$ der orthonormalen Eigenvektoren als Spalten ist

$$\boldsymbol{P}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p \end{pmatrix},$$

     wobei für alle i die $\lambda_i > 0$ die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$ sind. (Diese Zerlegung ist numerisch aufwändig!) Dann gilt auch

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^\top = \underbrace{\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^{\frac{1}{2}}}_{=\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}} \underbrace{(\boldsymbol{\Lambda}^{\frac{1}{2}})^\top \boldsymbol{P}^\top}_{=\boldsymbol{A}^{\frac{\top}{2}}},$$

     und $\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}$ heißt *symmetrische Wurzel von* $\boldsymbol{A}$.
  2. **Cholesky-Wurzel:** Sei $\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}} := \boldsymbol{C}$ untere Dreiecksmatrix mit positiven Diagonalelementen und $\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^\top = \boldsymbol{A}$. Dann ist $\boldsymbol{C}$ die *eindeutig* bestimmte *Cholesky-Wurzel* von $\boldsymbol{A}$. (Diese ist numerisch vergleichsweise einfach zu erhalten!)
- **Anwendungen in der Statistik**
  1. Erzeugen von $N_p(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma})$-verteilten Zufallszahlen ($\boldsymbol{\Sigma}$ vorgegeben): Falls $\boldsymbol{Z} \sim N_p(\boldsymbol{0}, \mathbf{I})$, ist einfache Simulation möglich, indem p unabhängige $N(0,1)$-verteilte Zufallsvariablen $Z_1, \ldots, Z_p$ simuliert werden. Dann gilt auch

$$\boldsymbol{\Sigma}^{1/2}\boldsymbol{Z} \;\sim\; N_p(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma}^{1/2}\boldsymbol{I}\boldsymbol{\Sigma}^{\top/2}) \doteq N(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma}).$$

     Also: Berechne Cholesky-Wurzel von $\boldsymbol{\Sigma}$, ziehe p $N(0,1)$-verteilte Zufallsvariablen $\boldsymbol{Z} = (z_1, \ldots, z_p)^\top$, berechne $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{\Sigma}^{1/2}\boldsymbol{Z}$. Dann ist $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_p)^\top$ ein $N_p(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma})$-verteilter Zufallsvektor.

2. Matrixnormierung bei asymptotischer Normalverteilung:

Beispiel 2.19 (Asymptotische Normalität des KQ-Schätzers im linearen Modell)**.** *Seien $y_1|\boldsymbol{x}_1, \ldots, y_n|\boldsymbol{x}_n$ unabhängig. Dann gilt*

$$\mathbb{E}[y_i|\boldsymbol{x}_i] = \boldsymbol{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}, \quad \mathrm{Var}(y_i|\boldsymbol{x}_i) = \sigma^2, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$\Leftrightarrow \ \boldsymbol{y}_n = \boldsymbol{X}_n\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}_n, \ \ \mathbb{E}[\boldsymbol{\varepsilon}_n] = \boldsymbol{0}, \ \mathrm{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon}_n) = \sigma^2 \boldsymbol{I}_n.$$

Der KQ-Schätzer ist

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n = (\boldsymbol{X}_n^\top \boldsymbol{X}_n)^{-1} \boldsymbol{X}_n^\top \boldsymbol{y}_n, \ \ \mathbb{E}[\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n] = \boldsymbol{\beta}, \ \ \mathrm{Cov}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n) = \sigma^2 (\boldsymbol{X}_n^\top \boldsymbol{X}_n)^{-1}.$$

Die Informationsmatrix unter der Normalverteilungsannahme ist

$$\boldsymbol{I}(\boldsymbol{\beta}) = \frac{\boldsymbol{X}_n^\top \boldsymbol{X}_n}{\sigma^2} = \mathrm{Cov}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n)^{-1}.$$

Zentrale Grenzwertsätze (für unabhängige, nicht identisch verteilte Zufallsvariablen, kurz: i.n.i.d.) liefern unter geeigneten Voraussetzungen (informell):

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n \ \overset{a}{\sim} \ N_p(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 (\boldsymbol{X}_n^\top \boldsymbol{X}_n)^{-1}).$$

Genauere Formulierungen nehmen an, dass

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \boldsymbol{X}_n^\top \boldsymbol{X}_n =: \boldsymbol{A} > 0 \tag{2.1}$$

existiert (also: $\boldsymbol{X}_n^\top \boldsymbol{X}_n \approx n\boldsymbol{A} \ \Leftrightarrow \ (\boldsymbol{X}_n^\top \boldsymbol{X}_n)^{-1} \approx \boldsymbol{A}^{-1}/n$ für große n). Anwendung des (multivariaten) zentralen Grenzwertsatzes liefert dann:

$$\sqrt{n}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta}) \ \overset{d}{\to} N_p(0, \sigma^2 \boldsymbol{A}^{-1})$$

bzw.

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{\beta}}_n &\overset{a}{\sim} N_p(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 \boldsymbol{A}^{-1}/n) \\ \widehat{\boldsymbol{\beta}}_n &\overset{a}{\sim} N_p(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 (\boldsymbol{X}_n^\top \boldsymbol{X}_n)^{-1}). \end{aligned}$$

Die Annahme (2.1) ist zum Beispiel erfüllt, wenn $\boldsymbol{x}_i$, $i = 1, \ldots, n$, i.i.d. Realisierungen stochastischer Kovariablen $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_p)^\top$ sind. Dann gilt nach dem Gesetz der großen Zahlen:

$$\frac{1}{n} \boldsymbol{X}_n^\top \boldsymbol{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i^\top \ \overset{n \to \infty}{\to} \ \mathbb{E}[\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^\top] =: \boldsymbol{A}.$$

Typischerweise ist die Annahme (2.1) nicht *erfüllt bei deterministischen Regressoren mit Trend. Das einfachste Beispiel hierfür ist ein linearer Trend: $x_i = i$ für $i = 1, \ldots, n$ und $y_i = \beta_1 i + \varepsilon_i$. Dann ist*

$$\boldsymbol{X}_n^\top \boldsymbol{X}_n = \sum_{i=1}^n i^2$$

und daher

$$\frac{1}{n}\boldsymbol{X}_n^\top \boldsymbol{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n i^2}{n} \geq n \overset{n\to\infty}{\to} \infty.$$

In diesem Fall ist eine andere Normierung nötig, zum Beispiel eine Matrixnormierung mit

$$\boldsymbol{C}_n = (\boldsymbol{X}_n^\top \boldsymbol{X}_n).$$

Dann lässt sich die asymptotische Normalität des KQ-Schätzers

$$\boldsymbol{C}_n^{1/2}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta}) \overset{d}{\to} N_p(\boldsymbol{0}, \sigma^2 \boldsymbol{I})$$

bzw.

$$\tilde{\boldsymbol{C}}_n^{1/2}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta}) := \frac{\boldsymbol{C}_n^{1/2}}{\sigma}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta}) \overset{d}{\to} N_p(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I})$$

unter folgenden, sehr schwachen Bedingungen zeigen:

(D) Divergenzbedingung: *Für $n \to \infty$ gilt:*

$$(\boldsymbol{X}_n^\top \boldsymbol{X}_n)^{-1} \to \boldsymbol{0}.$$

Eine äquivalente Forderung ist:

$$\lambda_{min}(\boldsymbol{X}_n^\top \boldsymbol{X}_n) \to \infty,$$

wobei λ_{min} den kleinsten Eigenwert von $\boldsymbol{X}_n^\top \boldsymbol{X}_n$ bezeichnet. Die Divergenzbedingung sichert, dass die „Informationsmatrix"

$$\boldsymbol{X}_n^\top \boldsymbol{X}_n = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i^\top$$

für $n \to \infty$ gegen $\boldsymbol{\infty}$ divergiert, die Information mit $n \to \infty$ also laufend wächst.

Es gilt: (D) ist hinreichend und notwendig für die (schwache und starke) Konsistenz des KQ-Schätzers $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n$.

(N) Normalitätsbedingung:

$$\max_{i=1,\ldots,n} \boldsymbol{x}_i^\top (\boldsymbol{X}_n^\top \boldsymbol{X}_n)^{-1} \boldsymbol{x}_i \to 0 \quad \textit{für } n \to \infty$$

(N) sichert, dass die Information jeder Beobachtung i asymptotisch gegenüber der Gesamtinformation $\sum_{i=1}^n \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i^\top$ vernachlässigbar ist.

Unter (D) und (N) gilt

$$(\boldsymbol{X}_n^\top \boldsymbol{X}_n)^{1/2}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n - \boldsymbol{\beta}) \overset{d}{\to} N_p(\boldsymbol{0}, \sigma^2 \boldsymbol{I})$$

(Beweis mit Grenzwertsätzen für unabhängige, nicht identisch verteilte Zufallsvariablen), d.h. für praktische Zwecke:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_n \overset{a}{\sim} N_p(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 (\boldsymbol{X}_n^\top \boldsymbol{X}_n)^{-1})$$

für genügend großen Stichprobenumfang n. Dabei darf zusätzlich σ^2 durch einen konsistenten Schätzer $\widehat{\sigma}^2$ ersetzt werden.

Definition 2.26 (Asymptotische Normalität)**.**

1. Mit $\sqrt{n}$-Normierung: $\widehat{\theta}_n$ *heißt* asymptotisch normalverteilt *für* $\theta \overset{def}{\Leftrightarrow}$

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta) \overset{d}{\to} N(0, V(\theta)) \quad \textit{für } n \to \infty$$

mit nicht-negativ definiter (in der Regel positiv definiter) asymptotischer Kovarianzmatrix $V(\theta)$*.*

2. Mit Matrix-Normierung: $\widehat{\theta}_n$ *heißt* asymptotisch normalverteilt *für* $\theta \overset{def}{\Leftrightarrow}$ *es existiert eine Folge von Matrizen* $\boldsymbol{A}_n$ *mit* $\lambda_{\min}(\boldsymbol{A}_n) \to \infty$*, so dass*

$$\boldsymbol{A}_n^{1/2}(\widehat{\theta}_n - \theta) \overset{d}{\to} N(0, V(\theta)).$$

Bemerkung.

1. *Praxisformulierung:*

$$\widehat{\theta}_n \overset{a}{\sim} N(\theta, V(\theta)/n)$$

bzw.

$$\widehat{\theta}_n \overset{a}{\sim} N(\theta, (\boldsymbol{A}_n^{1/2})^{-1} V(\theta) (\boldsymbol{A}_n^{1/2})^{-\top}).$$

Dabei darf θ *in* $V(\theta)$ *durch* $\widehat{\theta}_n$ *ersetzt werden.*

2. *Oft:* $V(\theta) = \mathbf{I}$ *möglich, wenn geeignet normiert wird, zum Beispiel bei ML-Schätzung.*

Beispiel 2.20. *Seien* $X_1, \ldots, X_n$ *i.i.d. Zufallsvariablen mit (bekanntem) Erwartungswert* μ *und Varianz* σ^2*.*

$$S_\mu^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2$$

ist asymptotisch normal für σ^2 *mit* $V(\theta) = \mu_4 - \sigma^4$*,* $\mu_4 = \mathbb{E}[(X_i - \mu)^4] < \infty$*.* S_μ^2 *ist erwartungstreu. Für die Varianz erhält man:*

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}(S_\mu^2) &= \operatorname{Var}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 \right) \\
&= \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \operatorname{Var}\left[(X_1 - \mu)^2 \right] \\
&= \frac{1}{n} \Big(\mathbb{E}[(X_1 - \mu)^4] - \big(\mathbb{E}[(X_1 - \mu)^2] \big)^2 \Big) \\
&= \frac{1}{n} (\mu_4 - \sigma^4).
\end{aligned}$$

Es liegen die Voraussetzungen zur Anwendung des zentralen Grenzwertsatzes vor. Aus ihm folgt:

$$S_\mu^2 \overset{a}{\sim} N(\sigma^2, (\mu_4 - \sigma^4)/n) \quad \textit{bzw.} \quad \sqrt{n}(S_\mu^2 - \sigma^2) \overset{d}{\to} N(0, \mu_4 - \sigma^4).$$

Die Delta-Methode

$\widehat{\theta}_n$ sei asymptotisch normalverteilter Schätzer für θ.

Frage: Wie ist für eine gegebene Abbildung

$$h: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^k, k \leq p$$

der Schätzer $h(\widehat{\theta})$ für $h(\theta)$ verteilt?

Satz 2.27 (Delta-Methode)**.** *Sei h wie oben.*

1. *θ skalar: Für alle θ, für die h stetig differenzierbar ist mit $h'(\theta) \neq 0$, gilt:*

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N(0, V(\theta)) \Rightarrow \sqrt{n}(h(\widehat{\theta}_n) - h(\theta)) \xrightarrow{d} N(0, [h'(\theta)]^2 V(\theta))$$

2. *θ vektoriell: Sei*

$$\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_p)^\top \mapsto h(\theta) = (h_1(\theta), \ldots, h_k(\theta))^\top$$

mit Funktionalmatrix

$$(H(\theta))_{ij} = \frac{\partial h_i(\theta)}{\partial \theta_j}$$

mit vollem Rang. Für alle θ, für die $h(\theta)$ komponentenweise stetig partiell differenzierbar ist und jede Zeile von $H(\theta)$ ungleich dem Nullvektor ist, gilt:

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N(0, V(\theta)) \Rightarrow \sqrt{n}(h(\widehat{\theta}_n) - h(\theta)) \xrightarrow{d} N(0, H(\theta)V(\theta)H(\theta)^\top).$$

Beweisskizze für skalares θ. Taylorentwicklung von $h(\widehat{\theta}_n)$ um θ liefert:

$$h(\hat{\theta}_n) = h(\theta) + (\widehat{\theta}_n - \theta)h'(\theta) + o(\widehat{\theta}_n - \theta)^2.$$

Dabei ist für eine Folge von Zufallsvariablen X_n

$$X_n = o(a_n) \quad \text{falls } X_n/a_n \xrightarrow{P} 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Also:

$$h(\widehat{\theta}_n) \approx h(\theta) + (\widehat{\theta}_n - \theta)h'(\theta)$$

bzw.

$$\sqrt{n}(h(\widehat{\theta}_n) - h(\theta)) \approx \sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta)h'(\theta)$$

Aus $\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N(0, V(\theta))$ folgt dann, dass $\sqrt{n}(h(\widehat{\theta}_n) - h(\theta)) \xrightarrow{d} N(0, h'(\theta)^2 V(\theta))$. □

Asymptotische Cramer-Rao Schranke und asymptotische Effizienz

Seien $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} f(x|\theta)$ und

$$i(\theta) = -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2 \log f(x|\theta)}{\partial\theta\partial\theta^\top}\right]$$

die erwartete Fisher-Information einer Beobachtung X_i. Die Information der gesamten Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ ist dann

$$\boldsymbol{I}(\theta) = n \cdot i(\theta).$$

Satz 2.28 (Asymptotische Cramer-Rao Ungleichung)**.** *Unter Fisher-Regularität sowie leichten Zusatzannahmen gilt:*

1. *Aus* $\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N(0, V(\theta))$ *folgt* $V(\theta) \geq i^{-1}(\theta)$.
2. *Aus* $\sqrt{n}(h(\widehat{\theta}_n) - h(\theta)) \xrightarrow{d} N(0, D(\theta))$ *folgt*

$$D(\theta) \geq H(\theta) i^{-1}(\theta) H(\theta)^\top$$

mit "$\geq$" die Löwner-Ordnung (und den Bezeichnungen aus der Delta-Regel, Satz 2.27).

Definition 2.29 (Bester asymptotisch normaler (BAN)-Schätzer)**.** $\widehat{\theta}_n$ *heißt* BAN-Schätzer, *falls in 1. oben gilt:*

$$V(\theta) = i^{-1}(\theta).$$

Mit der Delta-Regel folgt unmittelbar:

Satz 2.30 (Transformation von BAN-Schätzern)**.** *Ist* $\widehat{\theta}_n$ *BAN-Schätzer für* θ*, so ist* $h(\widehat{\theta}_n)$ *BAN-Schätzer für* $h(\theta)$.

Bemerkung. *Das Konzept der asymptotischen Effizienz lässt sich auf die Matrix-Normierung übertragen:* $\widehat{\theta}$ *ist BAN-Schätzer für* θ *genau dann, wenn*

$$\boldsymbol{I}^{1/2}(\theta)(\widehat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N(0, I)$$

bzw. $\widehat{\theta}_n \overset{a}{\sim} N(\theta, \boldsymbol{I}^{-1}(\widehat{\theta}_n))$*, mit* $\boldsymbol{I}^{1/2}(\theta)$ *Wurzel der Fisher-Information* $\boldsymbol{I}(\theta)$ *der Stichprobe* $X_1, \ldots, X_n$*. Anstelle der erwarteten kann auch die beobachtete Fisher-Information* $\boldsymbol{J}(\theta)$ *verwendet werden.*