Aufgabe 1 (Lokations- und Skalenfamilie)

Die Dichtefunktion einer t-verteilten Zufallsvariablen $X \sim t_\nu(\mu, \sigma^2)$, mit Lokationsparameter $\mu \in \mathbb{R}$, Skalenparameter $\sigma \in \mathbb{R}_+$ und $\nu > 2$ Freiheitsgraden, lautet

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{\nu\pi}\sigma}\left(1 + \frac{(x-\mu)^2}{\nu\sigma^2}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

für $x \in \mathbb{R}$. Es gilt $\mathrm{E}(X) = \mu$ und $\mathrm{Var}(X) = \frac{\nu}{\nu-2}\sigma^2$. Zeigen Sie, dass die Familie der t-Verteilungen für festes ν zur Lokations- und Skalenfamilie gehört.

Aufgabe 2 (Exponentialfamilie, GLM, Likelihood- und Bayesinferenz)

Eine andere Familie von Verteilungen stellt die Exponentialfamilie dar.

(a) Zeigen Sie, dass die Familie der Normalverteilungen zur Exponentialfamilie gehört.

In der Statistik kennen wir die Expontialfamilie vor allem im Zusammenhang mit dem generalisierten linearen Modell.

(b) Geben Sie die Annahmen eines generalisierten linearen Modells an.

(c) Worin unterscheiden sich lineares Modell (LM), generalisiertes lineares Modell (GLM), additives Modell (AM), generalisiertes additives Modell (GAM), lineares gemischtes Modell (LMM), generalisiertes lineares gemischtes Modell (GLMM), additives gemischtes Modell (AMM) und generalisiertes additives gemischtes Modell (GAMM)? Erstellen Sie eine aussagekräftige Tabelle.

Der Fokus der Veranstaltung „Schätzen und Testen I“ liegt eher auf Methoden zum Schätzen und Testen, weniger auf statistischen Modellen:

(d) Worin unterscheiden sich die Likelihood- und die Bayesinferenz konzeptionell?

(e) Beschreiben Sie, wie Sie unter Zuhilfenahme der Likelihoodinferenz die Parameter eines generalisierten linearen Modells schätzen und testen können.

***Aufgabe 1** (Exponentialfamilie)

(a) Die Zufallsvariable X sei poissonverteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Zeigen Sie, dass die Verteilung von X zur Exponentialfamilie gehört.

(b) $X_1, \ldots, X_n$ seien i.i.d. Zufallsvariablen mit $X_i \sim \mathrm{Po}(\lambda)$, $\lambda > 0$, für $i = 1, \ldots, n$. Sei $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)^\top$. Zeigen Sie, dass die Verteilung von $\boldsymbol{X}$ zur Exponentialfamilie gehört.

*__Aufgabe 2__ (Lokations- und Skalenfamilie)

Sei X logistisch verteilt mit Parametern $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}_+$. Die Dichte der logistischen Verteilung lautet

$$f(x) = \frac{\exp\left(-\frac{x-a}{b}\right)}{b\left(1+\exp\left(-\frac{x-a}{b}\right)\right)^2}$$

für $x \in \mathbb{R}$. Es gilt $\mathrm{E}(X) = a$ und $\mathrm{Var}(X) = b^2\pi^2/3$. Zeigen Sie, dass die logistische Verteilung zur Lokations- und Skalenfamilie gehört.