Aufgabe 3 (Entscheidungstheorie: Schätzen)

Sei $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$ eine i.i.d. Stichprobe einer binomialverteilten Zufallsvariablen $X|\pi \sim \text{Bin}(1, \pi)$. Als Punktschätzer für π kann beispielsweise folgender Schätzer verwendet werden:

$$T(\boldsymbol{x}, a, b) = \frac{n\bar{x} + a}{n + a + b}, \text{ mit } a, b > 0.$$

(Dieser Schätzer entspricht dem Posteriori-Erwartungswert von $\pi|\boldsymbol{x}$, wenn a priori $\pi \sim \mathcal{B}e(a, b)$ betaverteilt mit $a, b > 0$.)

(a) Zeigen Sie, dass bei quadratischer Verlustfunktion die Risikofunktion von $T(\boldsymbol{X}, a, b)$

$$R(T, \pi) = \frac{n\pi(1-\pi) + (a - (a+b)\pi)^2}{(a+b+n)^2}$$

lautet.

(b) Welche besondere Eigenschaft besitzt die Risikofunktion aus Teil (a) für $a = b = \sqrt{n}/2$?

(c) Geben Sie die Risikofunktion des ML-Schätzers $T_c(\boldsymbol{X}) = \bar{X}$ bei quadratischer Verlustfunktion an.

(d) Skizzieren Sie für $n = 16$ die Risikofunktion aus (a) für $a = b = 1$ sowie die Risikofunktionen aus (b) und (c). Welcher der drei Schätzer ist unter diesen der Minimax-Schätzer?

Aufgabe 4 (Entscheidungstheorie: Testen)

Sei

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in K; \text{ Entscheidung } d_1 \\ 0 & \text{für } x \notin K; \text{ Entscheidung } d_0 \end{cases}$$

ein (nicht-randomisierter) Test für die Hypothesen

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \theta \in \Theta_1$$

über einen Parameter θ, wobei $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$. Jede Verlustfunktion L besitzt also die beiden möglichen Werte $L(d_0; \theta)$ und $L(d_1; \theta)$.

(a) Geben Sie die zugehörige Risikofunktion $R(\varphi; \theta)$ an und drücken Sie diese durch die Gütefunktion des Tests aus.

(b) Sei

$$L(d_0; \theta) = \begin{cases} v_{00} & \text{für } \theta \in \Theta_0 \\ v_{10} & \text{für } \theta \in \Theta_1 \end{cases}$$

$$L(d_1; \theta) = \begin{cases} v_{01} & \text{für } \theta \in \Theta_0 \\ v_{11} & \text{für } \theta \in \Theta_1 \end{cases}$$

wobei $v_{10}, v_{01} > \max(v_{00}, v_{11})$ gelten soll. Geben Sie die zugehörige Risikofunktion in Abhängigkeit von der Gütefunktion an.

(c) Spezialisieren Sie (b) für den Fall $v_{00} = v_{11} = 0, v_{10} = v_{01} = 1$ und diskutieren Sie, wie man einen Test zum Niveau α zu konstruieren hat, der minimales Risiko für $\theta \in \Theta_1$ besitzt.

***Aufgabe 3** (Risikofunktion, minimax-Schätzer)

Sei X logistisch verteilt mit Parametern $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}_+$. Die Dichte der logistischen Verteilung lautet

$$f(x) = \frac{\exp\left(-\frac{x-a}{b}\right)}{b\left(1+\exp\left(-\frac{x-a}{b}\right)\right)^2}$$

für $x \in \mathbb{R}$. Es gilt $\mathrm{E}(X) = a$ und $\mathrm{Var}(X) = b^2\pi^2/3$. Seien $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. wie X. Sie möchten Parameter a schätzen und betrachten dazu die Schätzer T und U.

(a) Berechnen Sie die Risikofunktion bei quadratischer Verlustfunktion für den Schätzer $T(\boldsymbol{X}) = \bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i/n$.

(b) Betrachten Sie nun den Schätzer $U(\boldsymbol{X}, c) = \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}\bar{X}$, mit $c \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie für U die Risikofunktion bei quadratischer Verlustfunktion.

(c) Skizzieren Sie die berechneten Risikofunktionen für die Schätzer T und U. Sie können sich auf den Bereich $a \in [-5, 5]$ beschränken, und $b = 3$, $c = 1$, sowie $n = 10$ verwenden.

(d) Welcher der beiden Schätzer ist in diesem Fall minimax-Schätzer?