Aufgabe 5 (Minimalsuffizienz)

Sei $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$ ein Zufallsvektor mit $X_i \overset{i.i.d.}{\sim} \mathrm{N}(\mu, \sigma^2),\ i = 1\dots, n,\ \mu \in \mathbb{R},\ \sigma^2 > 0$. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) μ unbekannt, σ^2 bekannt: $T(\boldsymbol{X}) = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ ist minimalsuffizient für μ.

(b) μ bekannt, σ^2 unbekannt: $T(\boldsymbol{X}) = \sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$ ist minimalsuffizient für σ^2.

(c) μ unbekannt, σ^2 unbekannt: $T(\boldsymbol{X}) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i, \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2\right)$ ist minimalsuffizient für (μ, σ^2).

Aufgabe 6 (Vollständigkeit)

Betrachten Sie die i.i.d. Stichprobe $X_1, \dots, X_n$ zur $\mathrm{Bin}(1, \pi)$-verteilten Zufallsvariable X mit $\pi \in (0, 1)$. Betrachten Sie den Schätzer $T(\boldsymbol{X}) = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

(a) Ist $T(\boldsymbol{X})$ erwartungstreu für π?

(b) Zeigen Sie: $T(\boldsymbol{X})$ ist vollständig für π.
Hinweis: Verwenden Sie dabei folgenden Spezialfall des Identitätssatzes für Polynome:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0 \text{ für alle } x \in (0, \infty) \ \Leftrightarrow\ a_k = 0 \text{ für } k = 0, \dots, n.$$

***Aufgabe 4** (Erwartungstreue, Minimalsuffizienz)

Sei $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$ ein Zufallsvektor mit $X_i \overset{i.i.d.}{\sim} \mathrm{Bin}(1, \pi)$ mit $\pi \in [0, 1]$ und $U(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ eine Statistik für π.

(a) Ist $U(\boldsymbol{X})$ erwartungstreu für π?

(b) Zeigen Sie, dass $U(\boldsymbol{X})$ minimalsuffizient für π ist.

Betrachten Sie nun den Schätzer $V(\boldsymbol{X})$ für π^2:

$$V(\boldsymbol{X}) = \frac{U(\boldsymbol{X})[U(\boldsymbol{X}) - 1]}{n(n-1)}$$

(c) Überprüfen Sie, ob $V(\boldsymbol{X})$ erwartungstreu für π^2 ist.