Aufgabe 7 (Zulässigkeit)

Betrachten Sie die i.i.d. Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ eines $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilten Untersuchungsmerkmals X mit bekannter Varianz $\sigma^2 > 0$ und unbekanntem Erwartungswert $\mu \in \mathbb{R}$. Berechnen und skizzieren Sie den erwarteten quadratischen Fehler der folgenden Schätzfunktionen für μ:

$$T_1(\boldsymbol{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \text{und} \qquad T_2(\boldsymbol{X}) = \frac{b}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i + a,$$

wobei $a \in \mathbb{R}$ und $b \in (0,1)$. Kann man anhand der Skizze $T_1(\boldsymbol{X})$ oder $T_2(\boldsymbol{X})$ als zulässigen oder als unzulässigen Schätzer identifizieren?

Aufgabe 8 (MSE-Matrix, Erwartungstreue)

Betrachten Sie das lineare Modell

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

mit $\mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{0}$ und $\mathrm{Cov}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2\boldsymbol{I},\ \sigma^2 > 0$. Zeigen Sie, dass für $\lambda \geq 0$ die Lösung unter dem penalisierten Minimierungskriterium

$$(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})^\top(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}) + \lambda\boldsymbol{\beta}^\top\boldsymbol{\beta} \longrightarrow \min_{\boldsymbol{\beta}}$$

gleich dem Ridge-Schätzer

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_R = (\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X} + \lambda\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{y}$$

entspricht und berechnen Sie die MSE-Matrix von $\hat{\boldsymbol{\beta}}_R$. Vergleichen Sie diese mit der MSE-Matrix des Kleinste-Quadrate-Schätzers

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{KQ}} = (\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{y}$$

für $\boldsymbol{\beta}$. Wie verhält es sich mit der Erwartungstreue der Schätzer (bezüglich $\boldsymbol{\beta}$)?

***Aufgabe 5** (Zulässigkeit, minimax)

Angenommen, es existieren genau drei Schätzer, T_1, T_2 und T_3, für einen Parameter $\theta \in [0,1]$.

(a) Skizzieren Sie beispielhaft den MSE von T_1, T_2 und T_3, so dass T_1 und T_2 zulässige Schätzer für θ sind, aber T_3 ein unzulässiger Schätzer für θ ist.

(b) Skizzieren Sie Risikofunktionen für T_1, T_2 und T_3, so dass T_1 minimax-Schätzer ist.

***Aufgabe 6** (MSE-Matrix)

Betrachten Sie den Parameter $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)^\top$ und einen Schätzer $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)^\top$, mit

$$\mathrm{E}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \ \mathrm{Cov}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die MSE-Matrix von $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ an.