Aufgabe 9 (Likelihood-Inferenz, Cramer-Rao-Ungleichung)

Die Zufallsvariable X sei log-normalverteilt, d.h. $\log(X) \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, mit Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \frac{1}{x} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\log(x)-\mu\right)^2\right)$$

und

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_{\boldsymbol{\theta}}(X) &= \exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right), \\ \mathrm{Var}_{\boldsymbol{\theta}}(X) &= \exp\left(2\mu+\sigma^2\right)\left(\exp\left(\sigma^2\right)-1\right), \end{aligned}$$

wobei $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2)^\top$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$. Eine Stichprobe von X umfasse die unabhängigen Beobachtungen $x_1, \ldots, x_n$.

(a) Bestimmen Sie die Likelihood, Log-Likelihood, Scorefunktion sowie die beobachtete und erwartete Fisher-Information von $\boldsymbol{\theta}$.

(b) Sei im Weiteren $\mu = 0$ und $T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ mit $\log(X_i) \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathrm{N}(\mu, \sigma^2),\ i = 1, \ldots, n$ ein Schätzer für $\mathrm{E}_{\sigma^2}(X) = \exp(\sigma^2/2)$. Lässt sich die Cramer-Rao-Ungleichung anwenden? Wenn ja, wird die Cramer-Rao-Schranke angenommen?

Tipp: Verwenden Sie die Ungleichung $\exp(x) > 1 + \frac{x^2}{2}$ für $x > 0$.

Aufgabe 10 (Satz von Rao-Blackwell)

Im Bernoulli-Experiment mit $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathrm{Bin}(1, \pi)$ ist die Anzahl der Erfolge $T(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^n X_i$ suffizient für den Parameter $\pi \in [0, 1]$. Sei $U(\boldsymbol{X}) = X_1 X_2$ ein Schätzer für die Wahrscheinlichkeit π^2, dass zwei stochastisch unabhängige X_i beide Erfolg haben.
Berechnen Sie aus $U(\boldsymbol{X})$ durch Rao-Blackwellisieren einen verbesserten erwartungstreuen Schätzer für π^2.

Aufgabe 11 (Delta-Methode)

Zeigen Sie mit Hilfe der Delta-Methode: Für i.i.d. Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ mit bekanntem Erwartungswert $\mu \in \mathbb{R}$ und unbekannter Varianz $\sigma^2 > 0$ ist

$$S_n = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}$$

ein asymptotisch normalverteilter Schätzer für σ. Genauer gilt

$$\sqrt{n}(S_n - \sigma) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{\mu_4 - \sigma^4}{4\sigma^2}\right)$$

mit $\mu_4 = \mathrm{E}_{\sigma^2}(X_i - \mu)^4$.

Hinweis: Benutzen Sie eine Aussage aus der Vorlesung zur asymptotischen Normalität eines ähnlichen Schätzers.

***Aufgabe 7** (Suffizienz, Erwartungstreue, Rao-Blackwellisierung)

Sei $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$ ein Zufallsvektor mit $X_i \overset{i.i.d.}{\sim} \mathrm{U}[0,\theta]$ mit unbekanntem Parameter $\theta > 0$, wobei die Dichtefunktion der Gleichverteilung gegeben ist durch

$$f(x) = \frac{1}{\theta}\, \mathbb{1}_{[0,\theta]}(x)$$

für $x \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{1}$ bezeichnet die Indikatorfunktion). Im Folgenden soll θ geschätzt werden.

(a) Zeigen Sie: $T(\boldsymbol{X}) = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ ist suffizient für θ.

(b) Zeigen Sie: $V(\boldsymbol{X}) = 2\bar{X} = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ ist erwartungstreu für θ.

(c) Berechnen Sie aus $V(\boldsymbol{X})$ einen verbesserten erwartungstreuen Schätzer $V^*(\boldsymbol{X})$ für θ in dem Sinne, dass $\mathrm{Var}_\theta(V^*(\boldsymbol{X})) \leq \mathrm{Var}_\theta(V(\boldsymbol{X}))$.

Tipp: Wenn die X_i der Größe nach geordnet werden und $X_{(i)}$ die i-te Zufallsvariable in der geordneten Reihe ist, gilt:

$$\mathrm{E}_\theta(X_{(i)}|T = t) = i \cdot \frac{t}{n} \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, n$$

***Aufgabe 8** (ML-Schätzung, Delta-Methode, Cramer-Rao-Schranke)

Seien $X_1, \dots, X_m \overset{i.i.d.}{\sim} \mathrm{Exp}(\lambda)$ unabhängige exponentialverteilte Zufallsvariablen mit Rate $\lambda > 0$ und $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_m)^\top$ und $\bar{X} = m^{-1}\sum_{i=1}^m X_i$.

(a) Zeigen Sie, dass die Scorefunktion von λ

$$s(\lambda|\boldsymbol{X}) = \frac{m}{\lambda} - m\bar{X}$$

und der Maximum-Likelihood-Schätzer von λ

$$T(\boldsymbol{X}) = \widehat{\lambda}_{\mathrm{ML}} = 1/\bar{X}$$

lautet.

(b) Zeigen Sie, dass der Schätzer $V(\boldsymbol{X}) = 1/\widehat{\lambda}_{\mathrm{ML}}$ erwartungstreu für den Erwartungswert der gegebenen Exponentialverteilung ist. Berechnen Sie außerdem die Varianz von $V(\boldsymbol{X})$.

(c) Berechnen Sie mit Hilfe der Delta-Regel die asymptotische Varianz von $T(\boldsymbol{X})$.

(d) Ist die asymptotische Varianz von $T(\boldsymbol{X})$ gleich der Cramer-Rao-Schranke?