Aufgabe 17 (Bayesinferenz: Normalverteilung)

Sei $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ eine i.i.d. Stichprobe einer normalverteilten Zufallsvariablen $X|\mu \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ (d.h. σ^2 bekannt) und a priori $\mu \sim \mathrm{N}(\nu, \tau^2)$ mit $\nu \in \mathbb{R}$ und $\tau > 0$.

(a) Bestimmen Sie die Posteriori-Verteilung von $\mu|\boldsymbol{x}$.

(b) Woraus setzt sich der Posteriori-Erwartungswert von $\mu|\boldsymbol{x}$ zusammen? Woraus die Varianz?

(c) Ist die Normalverteilung in diesem Fall konjugierte Verteilung?

Gegeben sei jetzt die konkrete Stichprobe

$$\boldsymbol{x} = (7.22, 4.87, 4.91, 5.96, 4.75, 4.53, 4.59, 6.25, 6.14, 4.70)^\top.$$

(d) Nehmen Sie an, dass $\sigma^2 = 1$, $\nu = 0$ und $\tau^2 = 10000$ und berechnen Sie (z.B. in R) drei bayesianische Punktschätzer sowie ein 95%-Kredibilitätsintervall für μ.

Gegeben sei jetzt die erweiterte Stichprobe

$$\boldsymbol{x}_{100} = (\boldsymbol{x}^\top, \boldsymbol{x}^\top, \boldsymbol{x}^\top, \boldsymbol{x}^\top, \boldsymbol{x}^\top, \boldsymbol{x}^\top, \boldsymbol{x}^\top, \boldsymbol{x}^\top, \boldsymbol{x}^\top, \boldsymbol{x}^\top)^\top.$$

(e) Wie ändern sich die Punkt- und Intervallschätzer im Vergleich zu Aufgabe (d)?

(f) Plotten Sie für beide Stichproben die Priori-Dichte, die Likelihood sowie die Posteriori-Dichte. Was ändert sich, wenn andere Priori-Parameter verwendet werden?

Aufgabe 18 (Bayesinferenz: Exponentialverteilung)

Seien $X_1, \dots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} Exp(\lambda)$ mit $\lambda > 0$.

(a) Nehmen Sie nun an, dass der Parameter λ a priori Gamma-verteilt ist: $\lambda \sim Ga(a, b)$. Zeigen Sie, dass für die Posteriori-Verteilung gilt:

$$\lambda | x \sim Ga(n + a, \sum_{i=1}^{n} x_i + b).$$

(b) Ist die Gamma-Verteilung konjugiert zur Exponentialverteilung? Erklären Sie.

(c) Bestimmen Sie den Posteriori-Erwartungswert und die Posteriori-Varianz von λ. Woraus setzt sich der Posteriori-Erwartungswert zusammen? Erläutern Sie den Einfluss der Priori und der Daten.

(d) Bestimmen Sie den Posteriori-Modus. Für welche Wahl der Hyperparameter a und b entspricht der Posteriori-Modus dem Maximum-Likelihood-Schätzer für λ?

*__Aufgabe 11__ (Bayesinferenz: Binomialverteilung)

Sei $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$ eine i.i.d. Stichprobe einer binomialverteilten Zufallsvariablen $X|\pi \sim \text{Bin}(1, \pi)$ und a priori $\pi \sim \mathcal{B}e(a, b)$ betaverteilt mit $a, b > 0$. D.h. π hat die Dichte

$$f(\pi) = \frac{\pi^{a-1}(1-\pi)^{b-1}}{B(a,b)} \quad \text{für } 0 < \pi < 1,$$

wobei $B(a, b) = \Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a + b)$ die Betafunktion und $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} \exp(-x) dx$ die Gammafunktion bezeichnet.

(a) Bestimmen Sie die Posteriori-Verteilung von $\pi|\boldsymbol{x}$ und zeigen Sie, dass die Betaverteilung die konjugierte Priori-Verteilung zur Binomialverteilung ist.

(b) Berechnen Sie den Posteriori-Erwartungswert und die Posteriori-Varianz von $\pi|\boldsymbol{x}$.