Aufgabe 21 (Normalverteilung mit semi-konjugierter Priori; direkte Simulation)

Im Folgenden gehen wir davon aus, dass $X|\mu, \sigma^2 \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. In Kapitel 4.5.1 III der Vorlesung wird der Fall einer semi-konjugierten Priori-Verteilung für μ und σ^2 behandelt. Hierbei wird angenommen, dass μ und σ^2 a priori unabhängig sind. Die Prioris werden wie folgt spezifiziert:

$$\mu \sim \mathrm{N}(\mu_0, \tau_0^2) \qquad \text{und} \qquad \sigma^2 \sim \text{inv-}\chi^2(\nu_0, \sigma_0^2).$$

(a) Zeigen Sie, dass die bedingte Posteriori-Verteilung von $\mu|\sigma^2, \boldsymbol{x}$ einer $\mathrm{N}(\mu_n, \tau_n^2)$-Verteilung entspricht, wobei μ_n und τ_n^2 gegeben sind durch:

$$\mu_n = \frac{\frac{1}{\tau_0^2}\mu_0 + \frac{n}{\sigma^2}\bar{x}}{\frac{1}{\tau_0^2} + \frac{n}{\sigma^2}} \quad \text{und} \quad \tau_n^2 = \frac{1}{\frac{1}{\tau_0^2} + \frac{n}{\sigma^2}}.$$

Die marginale Posteriori-Verteilung von $\sigma^2|\boldsymbol{x}$ ist gegeben durch:

$$f(\sigma^2|\boldsymbol{x}) \propto \tau_n \exp\left(-\frac{1}{2\tau_0^2}(\mu_n - \mu_0)^2\right) \cdot (\sigma^2)^{-\left(\frac{\nu_0}{2}+1\right)} \exp\left(-\frac{\nu_0\sigma_0^2}{2\sigma^2}\right) \cdot$$
$$\times \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i - \mu_n)^2\right).$$

(b) Unter welcher Voraussetzung lassen sich mithilfe der gegebenen Posteriori-Verteilung von $\sigma^2|\boldsymbol{x}$ analytisch Punkt- und Intervallschätzer bestimmen? Was wäre eine alternative Möglichkeit, um Punkt- und Intervallschätzer der marginalen Posteriori-Verteilung von $\sigma^2|\boldsymbol{x}$ zu berechnen?

(c) Beschreiben Sie in eigenen Worten oder Pseudocode einen Algorithmus, um aus dieser Verteilung Zufallszahlen zu ziehen.

(d) Beschreiben Sie in eigenen Worten oder Pseudocode einen Algorithmus, um aus der gemeinsamen Posteriori-Verteilung von $\mu, \sigma^2|\boldsymbol{x}$ Zufallszahlen zu ziehen.

(e) Erläutern Sie, wie Sie aus diesen Zufallszahlen Punkt- und Intervallschätzer für μ und σ^2 bestimmen können.

(f) Die prädiktive Posteriori-Verteilung von $Y|\boldsymbol{x}$ für eine neue Beobachtung y ist nicht direkt zugänglich. Beschreiben Sie in eigenen Worten oder Pseudocode einen Algorithmus, mit dem dennoch Zufallszahlen aus der prädiktiven Posteriori-Verteilung von $Y|\boldsymbol{x}$ gezogen werden können.

(g) Beschreiben Sie, wie Sie aus diesen Zufallszahlen eine Punkt- und eine Intervallprognose für Y bestimmen können.

*__Aufgabe 12__ (Dirichlet-Multinomial-Modell)

Zur Akuttherapie einer depressiven Episode wurden in einer Zufallsstichprobe von $n = 7168$ Betroffenen $x_1 = 3723$ Patienten medikamentös, $x_2 = 2314$ psychotherapeutisch und $x_3 = 801$ mit beiden Massnahmen behandelt, während $x_4 = 330$ Patienten alternative Therapieformen erhielten. Die Krankenkassen sind an den Kategoriewahrscheinlichkeiten $\theta_i, i = 1, \ldots, 4$, interessiert. Um die Schätzungen zukünftig aktualisieren zu können, wird ein bayesianischer Ansatz bevorzugt.

(a) Nennen, begründen und interpretieren Sie Ihre Modellwahl. Wie lautet das einparametrische Pendant?

(b) Leiten Sie die allgemeine Posteriori-Verteilung für Ihr Modell her und nennen und interpretieren Sie die Posteriori-Schätzer für $\mathrm{E}(\theta_i|\boldsymbol{x})$ und $\mathrm{Cov}(\theta_i, \theta_j|\boldsymbol{x})$, $i, j = 1, \ldots, 4$, $i \neq j$, wobei $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^\top$.

(c) Berechnen Sie bei Nutzung einer Gleichverteilungs-Priori die Posteriori-Erwartungswerte von $\theta_1|\boldsymbol{x}, \ldots, \theta_4|\boldsymbol{x}$ für die oben angegebenen Daten.