Klausur zur Vorlesung Schätzen und Testen I

15. Februar 2011

Christian Heumann, Volker Schmid, Julia Kärcher

Name, Vorname: ____

Matrikelnummer: __________________________

☐ Ich bin damit einverstanden, dass mein Klausurergebnis in Verbindung mit meiner Matrikelnummer im Internet veröffentlicht wird.

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$	Note
Punkte							

Wichtig:

- Überprüfen Sie zunächst, ob Ihr Klausurexemplar vollständig ist. Die Klausur sollte aus drei Blättern (ohne dieses Deckblatt) mit fünf Aufgaben bestehen.
- Verwenden Sie für Ihre Lösungen ausschließlich die Ihnen zur Verfügung gestellten Papierbögen. Beginnen Sie für jede Aufgabe eine neue Seite.
- Kennzeichnen Sie jedes abgegebene Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Als Hilfsmittel sind zugelassen:
  - drei handschriftlich beschriebene DIN-A4-Blätter,
  - die in der Übung verteilte Übersicht konjugierter Verteilungen,
  - die in der Übung verteilten Verteilungsübersichten aus dem Buch von Gelman, Carlin, Stern und Rubin (2004),
  - ein nichtprogrammierbarer Taschenrechner,
  - ein Wörterbuch.
- Maximal können 100 Punkte erreicht werden. Die Klausur ist mit 45 Punkten bestanden.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1	24 Punkte

Seien $X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$. Seien sowohl μ als auch σ^2 unbekannt, also $\theta = (\mu, \sigma^2)$. Betrachten Sie folgende Schätzer für σ^2:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 \qquad \text{und} \qquad V^2 = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

mit $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$.
Hinweis: Verwenden Sie $\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2(n-1)$.

(a) Sind die beiden Schätzer erwartungstreu für σ^2?

(b) Zeigen Sie, dass für die mittleren quadratischen Fehler gilt:

$$\mathrm{MSE}_\theta(S^2) = \frac{2}{n-1}\,\sigma^4 \qquad \text{und} \qquad \mathrm{MSE}_\theta(V^2) = \frac{2}{n+1}\,\sigma^4.$$

(c) Untersuchen Sie S^2 und V^2 auf ihre Zulässigkeit als Schätzer für σ^2.

(d) Geben Sie eine suffiziente Statistik für $\theta = (\mu, \sigma^2)$ an. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2	17 Punkte

Seien $X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d}{\sim} \mathrm{Po}(\lambda)$ mit Parameter $\lambda > 0$. Betrachten Sie die Hypothesen

$$H_0 : \lambda = \lambda_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \lambda = \lambda_1$$

mit $\lambda_0 > \lambda_1 > 0$.

(a) Zeigen Sie, dass der entsprechende Likelihood-Quotient die Form

$$\Lambda(x) = \Lambda(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right)^z \exp\bigl(-n(\lambda_1 - \lambda_0)\bigr)$$

für $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}_0$ und $z = \sum_{i=1}^{n} x_i$ hat.

(b) Begründen Sie, weshalb ein Test zum exakten Niveau α, der auf der Alternative die größte Güte hat, äquivalent ist zu

$$\phi(z) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } z < c_\alpha \\ \gamma_\alpha(z) & \text{, falls } z = c_\alpha \\ 0 & \text{, falls } z > c_\alpha. \end{cases}$$

Wieso ist eine Randomisierung notwendig?

(c) Bestimmen Sie den kritischen Wert c_α sowie die Randomisierungskonstante $\gamma_\alpha(z)$.

Hinweis: Die Summe von n i.i.d. $\mathrm{Po}(\lambda)$-verteilten Zufallsvariablen ist $\mathrm{Po}(n\lambda)$-verteilt.

Aufgabe 3	22 Punkte

Seien $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. t-verteilt mit Lokationsparameter $m \in \mathbb{R}$, Skalenparameter $s \in \mathbb{R}_+$ und $\nu > 2$ Freiheitsgraden. Die Dichte der t-Verteilung lautet

$$g(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{\nu\pi}s}\left(1 + \frac{1}{\nu}\left(\frac{x-m}{s}\right)^2\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

für $x \in \mathbb{R}$. Es gilt $\mathrm{E}(X_1) = m$ und $\mathrm{Var}(X_1) = \frac{\nu}{\nu-2}\, s^2$.

(a) Beschreiben Sie die t-Verteilung für festes ν als Lokations- und Skalenfamilie.

Im Folgenden sei der Parameter m bekannt, der Parameter s^2 soll geschätzt werden. Bei dieser Schätzung werde das Modell allerdings fehlspezifiziert: Für $X_1, \dots, X_n$ wird die Dichtefunktion f_{σ^2} der Normalverteilung mit festem Erwartungswert $\mu_0 \in \mathbb{R}$ und Varianz σ^2 angenommen.

(b) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\mathrm{E}_g\big(\log f_{\sigma^2}(X_1)\big) = -\frac{1}{2}\log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{\nu}{\nu-2}\, s^2 + m^2 - 2\mu_0 m + \mu_0^2\right).$$

(c) Berechnen Sie dasjenige $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+$, das die Kullback-Leibler-Distanz $D(g, f_{\sigma^2})$ minimiert. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

(d) Welche Art von Fehlspezifikation liegt hier vor? Nennen Sie zwei weitere Beispiele für Fehlspezifikation.

Aufgabe 4	15 Punkte

Seien $X_1, \dots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} Po(\lambda)$ mit $\lambda > 0$.

(a) Zeigen Sie, dass für dieses Datenmodell Jeffreys' Priori-Verteilung wie folgt aussieht:

$$\pi(\lambda) \propto \frac{1}{\sqrt{\lambda}}.$$

(b) Wann und warum wählt man Jeffreys' Priori als Priori-Verteilung? Warum eignet sie sich als Referenzpriori?

(c) Handelt es sich hierbei um eine eigentliche Dichte? Ist die Posteriori proper?

Aufgabe 5	22 Punkte

Betrachten Sie das bayesianische lineare Modell

$$\boldsymbol{y} \sim \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}\ , \quad \boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathrm{MVN}(\boldsymbol{0}, \sigma^2 \boldsymbol{I}),$$

mit $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p$, $\sigma^2 > 0$. A priori seien

$$p(\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{X}) \propto 1 \qquad \text{und} \qquad \sigma^2|\boldsymbol{X} \sim \mathrm{IG}(a,b)\ ,\ a,b \in \mathbb{R}_+.$$

(a) Zeigen Sie: Die vollständig bedingten Dichten von $\boldsymbol{\beta}$ und σ^2 lauten

$$\begin{aligned} \sigma^2|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{y},\boldsymbol{X} &\sim \mathrm{IG}\Big(a+\frac{n}{2}\ ,\ b+\frac{1}{2}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})'(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})\Big) \\ \boldsymbol{\beta}|\sigma^2,\boldsymbol{y},\boldsymbol{X} &\sim \mathrm{MVN}\Big(\hat{\boldsymbol{\beta}}\ ,\ \sigma^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\Big), \end{aligned}$$

wobei $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}$.

(b) Zeigen Sie: Die Posteriori-Randverteilung von σ^2 lautet

$$\sigma^2|\boldsymbol{y},\boldsymbol{X} \sim \mathrm{IG}\Big(a+\frac{n-p}{2}\ ,\ b+\frac{1}{2}\,\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}\Big),$$

wobei $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$.

Hinweis: Verwenden Sie $(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})'(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta}) = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} + (\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})$.

(c) Geben Sie eine Möglichkeit an, wie man aus der Posteriori-Randdichte $f(\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{y},\boldsymbol{X})$ simulieren könnte.