Klausur zur Vorlesung Schätzen und Testen I

13. Februar 2012

Volker Schmid, Julia Kärcher

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$	Note
Punkte							

Hinweise:

- Überprüfen Sie zunächst, ob Ihr Klausurexemplar vollständig ist. Die Klausur sollte aus drei Blättern (ohne dieses Deckblatt) mit fünf Aufgaben bestehen.
- Verwenden Sie für Ihre Lösungen ausschließlich die Ihnen zur Verfügung gestellten Papierbögen. Beginnen Sie für jede Aufgabe eine neue Seite.
- Kennzeichnen Sie jedes abgegebene Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Als Hilfsmittel sind zugelassen:
  - drei handschriftlich beschriebene DIN-A4-Blätter,
  - die in der Übung verteilte Übersicht konjugierter Verteilungen,
  - die in der Übung verteilten Verteilungsübersichten aus dem Buch von Gelman, Carlin, Stern und Rubin (2004),
  - ein nichtprogrammierbarer Taschenrechner,
  - ein Wörterbuch.
- Maximal können 100 Punkte erreicht werden. Die Klausur ist mit 45 Punkten bestanden.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Bei Unterschleif gilt die Klausur als nicht bestanden und es erfolgt eine Meldung an das Prüfungsamt.

Bitte ausfüllen und unterschreiben!!!

Name, Vorname: ______________________________

Matrikelnummer: ________________ *Studiengang:* ________________

Abschluss: ________________ *PO-Version (Jahr):* ________________

Ich bestätige, dass ich obige Hinweise zur Kenntnis genommen habe und sie befolgen werde.

Unterschrift: ______________________________

Viel Erfolg!

Aufgabe 1	28 Punkte

Seien $X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} Po(\lambda)$ mit $\lambda > 0$.

(a) Zeigen Sie, dass die Statistik $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ suffizient ist für λ. Überprüfen Sie ob T auch minimal-suffizient ist für λ.

(b) Geben Sie einen gleichmäßig besten erwartungstreuen (UMVU) Schätzer für λ an.

Hinweise:

Geben Sie ganz genau an, welche Sätze oder Resultate Sie verwenden und welche Annahmen dafür gelten müssen.

Fisher-Regularität oder Vollständigkeit darf hier ohne Überprüfung angenommen werden (aber bitte angeben, wo verwendet, falls verwendet).

(c) Was heißt UMVU Schätzer? Wieso ist das eine wünschenswerte Eigenschaft?

(d) Welche wechselseitige Beziehung besteht zwischen der Rao-Cramer-Schranke und UMVU-Schätzern?

Aufgabe 2	17 Punkte

Seien $X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d}{\sim} Exp(\lambda)$ mit Parameter $\lambda > 0$. Betrachten Sie die Hypothesen

$$H_0 : \lambda = \lambda_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \lambda = \lambda_1$$

mit $\lambda_0 < \lambda_1$.

(a) Geben Sie einen gleichmäßig besten Test ϕ^* zum Niveau α an. Wie wird die kritische Schranke berechnet? Ist dieser Test eindeutig? Ist eine Randomisierung erforderlich?

Hinweis: Die Summe von n i.i.d. $Exp(\lambda)$-verteilten Zufallsvariablen ist $\mathcal{G}a(\lambda, n)$-verteilt.

(b) Hängt der Test ϕ^* und die Fehler erster und zweiter Art von λ_0 und λ_1 ab?

(c) Was heißt gleichmäßig bester Test?

Aufgabe 3	28 Punkte

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch geometrisch verteilt mit Parameter π, also $X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} Geo(\pi)$. Sie können folgende Eigenschaften verwenden: Eine geometrisch verteilte Zufallsvariable $Y \sim Geo(\pi)$ hat Zähldichte $P(Y = k) = \pi(1-\pi)^{k-1}$ für $k \in \mathbb{N}$, Erwartungswert $\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{\pi}$ und Varianz $\mathrm{Var}(Y) = \frac{1-\pi}{\pi^2}$.

(a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für π.

(b) Nehmen Sie nun eine Betaverteilung als Priori-Verteilung für den unbekannten Parameter π an, das heißt, es gelte a priori $\pi \sim \mathcal{B}e(a, b)$. Zeigen Sie, dass für die Posteriori-Verteilung gilt:

$$\pi \mid \boldsymbol{x} \sim \mathcal{B}e(a + n, b + n\bar{x} - n)$$

(c) Ist die Beta-Verteilung konjugiert zur geometrischen Verteilung? Erklären Sie.

(d) Bestimmen Sie den Posteriori-Erwartungswert von π. Woraus setzt sich der Posteriori-Erwartungswert zusammen? Erläutern Sie den Einfluss der Priori und der Daten.

(e) Wie lautet der Posteriori-Modus von π? Für welche Werte der Hyperparameter a und b stimmt der Posteriori-Modus mit dem ML-Schätzer überein? Ist die Priori für diese Hyperparameter informativ?

Hinweis:

Auf die Überprüfung von zweiten Ableitungen bei der Bestimmung von Extrema können Sie verzichten.

Aufgabe 4	15 Punkte

Nehmen Sie an, die vollständig bedingten Dichten von zwei Parametern θ_1 und θ_2 werden bezeichnet durch $f(\theta_1|\theta_2, x)$, $f(\theta_2|\theta_1, x)$.

(a) Erklären Sie kurz, was mit dem Metropolis-Hastings-Algorithmus simuliert wird (ein, zwei Sätze genügen).

(b) Beschreiben Sie, wie im Metropolis-Hastings-Algorithmus simuliert wird. Bezeichnen Sie dabei mit θ_1^{alt} und θ_2^{alt} die aktuellen Werte der Parameter vor dem Update.

(c) Erläutern Sie, wie Metropolis-Hastings-Algorithmus und Gibbs-Sampler zusammenhängen, wann welcher Algorithmus vorzuziehen ist und wieso.

Aufgabe 5	12 Punkte

Seien $X_1, \ldots, X_n | \mu, \sigma \overset{i.i.d.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ und sei σ^2 bekannt.

(a) Zeigen Sie, dass für dieses Datenmodell und für festes σ^2 Jeffreys' Priori-Verteilung für μ wie folgt aussieht:

$$p_J(\mu) \propto \text{const.}$$

(b) Wann und warum wählt man Jeffreys' Priori als Priori-Verteilung? Warum eignet sie sich als Referenzpriori?

(c) Handelt es sich bei der Priori $p_J(\mu)$ um eine eigentliche Dichte?