Klausur zur Vorlesung Schätzen und Testen I

13. Februar 2013

Volker Schmid, Ludwig Bothmann, Julia Sommer

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$	Note
Punkte								

Bitte ausfüllen und unterschreiben!!!

Name, Vorname: ______________________________

Matrikelnummer: ________________ *Studiengang:* ________________

Abschluss: ________________ *PO-Version (Jahr):* ________________

Ich bestätige, dass ich die unten stehenden Hinweise zur Kenntnis genommen habe und sie befolgen werde.

Unterschrift: ______________________________

Hinweise:

- Überprüfen Sie zunächst, ob Ihr Klausurexemplar vollständig ist. Die Klausur sollte aus 2 Blättern (ohne dieses Deckblatt) mit 6 Aufgaben auf 4 Seiten bestehen.
- Verwenden Sie für Ihre Lösungen ausschließlich die Ihnen zur Verfügung gestellten Papierbögen und kennzeichnen Sie jeden Bogen mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer. Beginnen Sie für jede Aufgabe eine neue Seite.
- Als Hilfsmittel sind zugelassen:
  - drei handschriftlich beschriebene DIN-A4-Blätter,
  - die in der Übung verteilten Verteilungsübersichten (aus Gelman, Carlin, Stern und Rubin (2004)),
  - ein nichtprogrammierbarer Taschenrechner,
  - ein Wörterbuch.
- Maximal können 100 Punkte erreicht werden. Ein nachvollziehbarer Lösungsweg ist Voraussetzung zum Erlangen der vollen Punktzahl. Die Klausur ist mit 45 Punkten bestanden.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. In den ersten 30 Minuten und in den letzten 15 Minuten ist keine vorzeitige Abgabe vorgesehen.
- Bei Unterschleif gilt die Klausur als nicht bestanden und es erfolgt eine Meldung an das Prüfungsamt. Sie sind verpflichtet, durch Ihr Verhalten jegliche Missverständnisse diesbezüglich auszuschließen.
- Legen Sie einen Lichtbildausweis und einen aktuell gültigen Studienausweis bereit.
- Verlassen Sie den Prüfungsraum erst, nachdem Sie der Aufsicht die Klausur persönlich übergeben haben. Für den Eingang der kompletten Klausur bei der Aufsicht sind Sie selbst verantwortlich.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1	23 Punkte

Seien $X_1, \dots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} \text{Exp}(\lambda)$ mit $\lambda > 0$ mit Dichte

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda \exp\left(-\lambda x\right), & \text{für } x \geq 0 \\ 0, & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass eine Exponentialfamilie vorliegt.

(b) Berechnen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\lambda}_{ML}$ für λ.

(c) Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Likelihoodquotienten und der Minimalsuffizienz eines Schätzers? Verwenden Sie diesen Zusammenhang um zu zeigen, dass $\hat{\lambda}_{ML}$ minimalsuffizient für λ ist.

(d) Ist $\hat{\lambda}_{ML}$ auch suffizient für λ^2? Begründen Sie Ihre Antwort.

(e) Welche weiteren Möglichkeiten gibt es, die Minimalsuffizienz eines Schätzers nachzuweisen?

Aufgabe 2	19 Punkte

Seien $X_1, \dots, X_n \overset{i.i.d}{\sim} B(1, \pi)$ mit Parameter $\pi \in (0, 1)$. Betrachten Sie die Hypothesen

$$H_0 : \pi = \pi_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \pi = \pi_1$$

mit $\pi_0 < \pi_1$.

(a) Geben Sie einen gleichmäßig besten Test ϕ^* zum exakten Niveau α an. Ist dieser Test eindeutig? Ist eine Randomisierung erforderlich? Geben Sie die kritische Schranke und gegebenenfalls die Randomisierungskonstante an.
Hinweis: Die Summe von n i.i.d. $B(1, \pi)$-verteilten Zufallsvariablen ist $B(n, \pi)$-verteilt.

(b) Welche der folgenden Größen hängen von π_0 und/oder π_1 ab?

- Der Test ϕ^*
- Der Fehler 1. Art
- Der Fehler 2. Art

(c) Wie ist ein gleichmäßig bester Test definiert?

Aufgabe 3	16 Punkte

Gegeben sei eine Poisson-verteilte Zufallsvariable $X|\lambda \sim \text{Po}(\lambda)$, wobei $\lambda > 0$ unbekannt ist. Es werden n unabhängige Realisationen $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ aus der Verteilung von $X|\lambda$ gezogen. Aus diesen Zufallsziehungen soll auf den Parameter λ geschlossen werden.

(a) Bestimmen Sie Jeffreys' Priori für λ.

(b) Zu welcher Verteilungsfamilie gehört die Posteriori-Verteilung von $\lambda|\boldsymbol{x}$, wenn als Priori für λ Jeffreys' Priori benutzt wird? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Die explizite Berechnung der Posteriori-Dichte wird nicht verlangt, als Beweis aber akzeptiert.

Aufgabe 4	16 Punkte

Betrachtet wird das lineare Modell in Matrixform

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\epsilon} \sim \text{N}_n\left(\boldsymbol{0}, \sigma^2 \boldsymbol{I}\right),$$

wobei $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_p)^\top$. Nehmen Sie an, dass $\boldsymbol{\beta}$ bekannt ist.

Um im Folgenden eine bayesianische Schätzung für σ^2 durchführen zu können, wird als Priori-Verteilung für σ^2 eine Inverse Gammaverteilung

$$\sigma^2 \sim \text{IG}(a, b)$$

angenommen.

(a) Bestimmen Sie die Posteriori-Verteilung von $\sigma^2|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{\beta}$. Zeigen Sie, dass es sich wie bei der Priori-Verteilung um eine Inverse Gammaverteilung handelt und geben Sie deren Parameter a_{post} und b_{post} an.

(b) Geben Sie die Formeln für zwei mögliche bayesianische Punktschätzer für σ^2 an.

(c) Beschreiben Sie eine Möglichkeit, ein bayesianisches $(1-\alpha)$ – Kredibilitätsintervall für σ^2 zu bestimmen.

Aufgabe 5	18 Punkte

Gegeben seien Wartezeiten $y_1, \dots, y_n$ und Vektoren von p Kovariablen $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$, mit welchen die Wartezeiten erklärt werden sollen. Für diese Fragestellung bietet sich ein generalisiertes lineares Modell mit folgenden Annahmen an:

- Verteilungsannahme: $y_i|\boldsymbol{x}_i \overset{unabh.}{\sim} \mathrm{Exp}(\lambda_i)$
- Linearer Prädiktor: $\eta_i = \boldsymbol{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}$
- Linkfunktion: $\mathrm{E}(y_i|\boldsymbol{x}_i) = \mu_i = h(\eta_i) = \exp(\eta_i)\,(\Leftrightarrow g(\mu_i) = \eta_i = \log(\mu_i))$.

Für die bayesianische Inferenz ist außerdem die Spezifizierung einer Priori-Verteilung für $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_p)^\top$ nötig. Wir nehmen im Folgenden eine multivariate Normalverteilung an

$$\boldsymbol{\beta} \sim \mathrm{N}_p(\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{B}_0).$$

Als Posteriori-Dichte für $\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}$ ergibt sich

$$p(\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}) \propto \exp\left\{\left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i^\top \boldsymbol{\beta} - y_i \exp(\boldsymbol{x}_i^\top \boldsymbol{\beta})\right) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{b}_0)^\top \boldsymbol{B}_0^{-1}(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{b}_0)\right\}.$$

(a) Begründen Sie, wieso in diesem Fall der Metropolis-Algorithmus geeignet ist, um $D = 1000$ Zufallszahlen aus der Posteriori-Verteilung von $\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}$ zu ziehen. Beschreiben Sie den Algorithmus in eigenen Worten oder Pseudocode. Verwenden Sie dabei als Vorschlagsdichte für $\boldsymbol{\beta}_{neu}|\boldsymbol{\beta}_{alt}$ eine multivariate Normalverteilung, die um den Wert der vorherigen Iteration $\boldsymbol{\beta}_{alt}$ zentriert ist und als Kovarianzmatrix die geschätzte Kovarianzmatrix des ML-Schätzers hat:

$$\boldsymbol{\beta}_{neu}|\boldsymbol{\beta}_{alt} \sim \mathrm{N}_p\left(\boldsymbol{\beta}_{alt}, \widehat{\mathrm{Cov}}\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{ML}\right)\right).$$

(b) Geben Sie eine Formel an, um aus diesen Zufallszahlen einen Punktschätzer für $\boldsymbol{\beta}$ zu berechnen.

(c) Beschreiben Sie, wie aus diesen Zufallszahlen ein $(1 - \alpha)$ – Kredibilitätsintervall für β_1 berechnet werden kann.

Aufgabe 6	8 Punkte

Im Folgenden sehen Sie die Anfänge von vier verschiedenen Aussagen (A-D). Ergänzen Sie jeden Anfang passend mit einer der drei angegebenen Möglichkeiten. Es ist jeweils genau eine Aussage richtig. Notieren Sie die passende Ergänzung auf Ihrem Kanzleibogen (keine Begündung notwendig). Sie erhalten für jede richtige Antwort zwei Punkte, **für jede falsche Antwort einen Minuspunkt**. Sie können in dieser Aufgabe maximal 8 und minimal 0 Punkte erreichen.

A. Die Präzision ist

(1) die Inverse der Varianz.

(2) der Mittelwert der Varianz.

(3) die Wurzel der Varianz.

B. Der Satz von Basu sagt: Ist T vollständig und suffizient und

(1) V ancillary, dann sind V und T unabhängig.

(2) V minimalsuffizient, dann ist T ungleich V.

(3) V erwartungstreu, dann ist $T|V$ asymptotisch normal.

C. Seien μ und θ Parameter eines bayesianischen Modells. Transformiert man θ zu $\phi = \mu + \theta$, dann gilt:

(1) $p(\phi|\boldsymbol{x}, \mu) = p(\theta|\boldsymbol{x}, \mu)$.

(2) $p(\phi|\boldsymbol{x}, \mu) \propto f(\boldsymbol{x}|\mu, \theta)p(\theta)p(\mu)$.

(3) $p(\phi|\boldsymbol{x}, \mu) \propto f(\phi|\mu, \theta)p(\theta)p(\mu)$.

D. Die Bonferroni-Prozedur kontrolliert die family-wise error rate

(1) nicht.

(2) schwach.

(3) stark.