Nachhol-Klausur zur Vorlesung Schätzen und Testen I

26. März 2012

Volker Schmid, Julia Kärcher

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$	Note
Punkte							

Hinweise:

- Überprüfen Sie zunächst, ob Ihr Klausurexemplar vollständig ist. Die Klausur sollte aus drei Blättern (ohne dieses Deckblatt) mit fünf Aufgaben bestehen.
- Verwenden Sie für Ihre Lösungen ausschließlich die Ihnen zur Verfügung gestellten Papierbögen. Beginnen Sie für jede Aufgabe eine neue Seite. Geben Sie alle Papierbögen und die Angabe ab.
- Kennzeichnen Sie jedes abgegebene Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Als Hilfsmittel sind zugelassen:
  - drei handschriftlich beschriebene DIN-A4-Blätter,
  - die in der Übung verteilte Übersicht konjugierter Verteilungen,
  - die in der Übung verteilten Verteilungsübersichten aus dem Buch von Gelman, Carlin, Stern und Rubin (2004),
  - ein nichtprogrammierbarer Taschenrechner,
  - ein Wörterbuch.
- Maximal können 100 Punkte erreicht werden. Die Klausur ist mit 45 Punkten bestanden.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Bei Unterschleif gilt die Klausur als nicht bestanden und es erfolgt eine Meldung an das Prüfungsamt.

Bitte ausfüllen und unterschreiben!!!

Name, Vorname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________ *Studiengang:* ______________

Abschluss: ______________ *PO-Version (Jahr):* ______________

Ich bestätige, dass ich obige Hinweise zur Kenntnis genommen habe und sie befolgen werde.

Unterschrift: ______________________________

Viel Erfolg!

Aufgabe 1	15 Punkte

Seien $X_1, \dots, X_n \overset{i.i.d}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ mit bekanntem Parameter $\mu \in \mathbb{R}$ und unbekanntem $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+$. Betrachten Sie die Hypothesen

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \sigma^2 = \sigma_1^2$$

mit $\sigma_0^2 < \sigma_1^2$.

(a) Geben Sie einen gleichmäßig besten Test ϕ^* zum Niveau α an. Wie wird die kritische Schranke berechnet? Ist dieser Test eindeutig? Ist eine Randomisierung erforderlich?

Hinweis: Verwenden Sie, dass $\frac{nS_\mu^2(X)}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$ mit $nS_\mu^2(X) = \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$.

(b) Hängen der Test ϕ^* und die Fehler erster und zweiter Art von σ_0^2 und σ_1^2 ab?

Aufgabe 2	28 Punkte

Seien $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. Weibull verteilt mit Dichte

$$f_{\alpha,m}(x) = \begin{cases} \frac{m}{\alpha} x^{m-1} \exp(\frac{-x^m}{\alpha}) & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Wir nehmen an $m = 2$ ist bekannt, $\alpha > 0$ ist unbekannt.

(a) Zeigen Sie, dass die Statistik $T = \sum_{i=1}^n X_i^2$ suffizient ist für α. Ist T auch minimalsuffizient für α?

(b) Geben Sie einen erwartungstreuen, suffizienten Schätzer für α an. Überprüfen Sie dann, ob dieser Schätzer sogar gleichmäßig bester erwartungstreuer (UMVU) Schätzer für α ist.

(c) Welche wechselseitige Beziehung besteht zwischen der Rao-Cramer-Schranke und UMVU-Schätzern?

(d) Wann heißt ein Schätzer zulässig, wann effizient? Erklären Sie diese Eigenschaften in eigenen Worten und setzen Sie sie in Beziehung.

Hinweise:

Geben Sie ganz genau an, welche Sätze oder Resultate Sie verwenden und welche Annahmen dafür gelten müssen. Fisher-Regularität darf hier ohne Überprüfung angenommen werden (aber bitte angeben, wo verwendet, falls verwendet).

Für das Quadrat der Weibull-verteilten Zufallsvariablen X_i gilt: $W = X_i^2 \sim Exp(\frac{1}{\alpha})$.

Zwischenergebnis für die Scorefunktion: $s(\alpha, x) = -\frac{n}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \sum_{i=1}^n x_i^2$

Aufgabe 3	16 Punkte

Seien $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. logistisch verteilt mit Parametern $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}_+$. Die Dichte der logistischen Verteilung lautet

$$g(x) = \frac{\exp\left(-\frac{x-a}{b}\right)}{b\left(1+\exp\left(-\frac{x-a}{b}\right)\right)^2}$$

für $x \in \mathbb{R}$. Es gilt $\mathrm{E}(X_1) = a$ und $\mathrm{Var}(X_1) = b^2\pi^2/3$.

(a) Beschreiben Sie die logistische Verteilung als Lokations- und Skalenfamilie.

Im Folgenden sei der Parameter $b > 0$ bekannt, der Parameter a soll geschätzt werden. Bei der Schätzung von a werde das Modell nun allerdings fehlspezifiziert: Für $X_1, \ldots, X_n$ wird die Dichtefunktion f_μ der Normalverteilung mit Erwartungswert μ und fester Varianz σ_0^2 angenommen.

(b) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\mathrm{E}_g\big(\log f_\mu(X_1)\big) = -\frac{1}{2}\log(2\pi\sigma_0^2) - \frac{1}{2\sigma_0^2}\left(\frac{b^2\pi^2}{3} + a^2 - 2\mu a + \mu^2\right).$$

(c) Berechnen Sie dasjenige $\mu \in \mathbb{R}$, das die Kullback-Leibler-Distanz $D(g, f_\mu)$ minimiert. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

Aufgabe 4	27 Punkte

Seien $X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} Exp(\lambda)$ mit $\lambda > 0$.

(a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für λ.

(b) Nehmen Sie nun an, dass der Parameter λ a priori Gamma-verteilt ist: $\lambda \sim Ga(a, b)$. Zeigen Sie, dass für die Posteriori-Verteilung gilt:

$$\lambda | x \sim Ga(n + a, \sum_{i=1}^{n} x_i + b).$$

(c) Ist die Gamma-Verteilung konjugiert zur Exponentialverteilung? Erklären Sie.

(d) Bestimmen Sie den Posteriori-Erwartungswert und die Posteriori-Varianz von λ. Woraus setzt sich der Posteriori-Erwartungswert zusammen? Erläutern Sie den Einfluss der Priori und der Daten.

(e) Bestimmen Sie den Posteriori-Modus. Für welche Wahl der Hyperparameter a und b entspricht der Posteriori-Modus dem Maximum-Likelihood-Schätzer für λ? Ist die Priori für diese Hyperparameter informativ?

(f) Welche Möglichkeiten gibt es allgemein die Posteriori in Bayesianischen Modellen zu berechnen? Geben Sie einen Überblick. Welches Verfahren ist wann geeignet und wieso?

Hinweise: Sie dürfen auf Erwartungswert, Modus, Varianz von bekannten Verteilungen zurückgreifen. Auf die Überprüfung von zweiten Ableitungen bei der Bestimmung von Extrema können Sie verzichten.

Aufgabe 5	14 Punkte

Die folgende Tabelle enthält sieben verschiedene Aussagen. Geben Sie für jede dieser Aussagen an, ob sie wahr oder falsch ist, indem Sie das entsprechende Feld ankreuzen. Sie erhalten für jedes richtig angekreuzte Feld zwei Punkte, **für jedes falsch angekreuzte zwei Minuspunkte**. Sie können in dieser Aufgabe maximal 14 und minimal 0 Punkte erreichen.

Aussage	**Wahr**	**falsch**
Der Posteriori-Modus ist Bayes-optimal bei absoluter Verlustfunktion.	☐	☐
In der Bayes-Inferenz werden alle Schlüsse aus der Priori gezogen.	☐	☐
Die Dirichletverteilung für $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)^T$ spezifiziert eine Verteilung auf einem k-dimensionalen offenen Simplex.	☐	☐
Wählt man im Metropolis-Hastings-Algorithmus eine symmetrische Dichte als Vorschlagsdichte, so ergibt sich eine Akzeptanzwahrscheinlichkeit von eins.	☐	☐
Beim Newton-Raphson-Verfahren ist das Ergebnis vom Startwert unabhängig.	☐	☐
Eine konjugierte Verteilung zur multivariaten Normalverteilung ist die multivariat-Normal-Inverse-Wishart-Verteilung.	☐	☐
Bei Bayesianischer Lasso-Regression wird die Laplace-Verteilung als Priori auf den Regressionsparametern verwendet.	☐	☐