Nachholklausur zur Vorlesung Schätzen und Testen I

04. April 2013

Volker Schmid, Ludwig Bothmann, Julia Sommer

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$	Note
Punkte								

Bitte ausfüllen und unterschreiben!!!

Name, Vorname: ______________________________

Matrikelnummer: ________________ *Studiengang:* ________________

Abschluss: ________________ *PO-Version (Jahr):* ________________

Ich bestätige, dass ich die unten stehenden Hinweise zur Kenntnis genommen habe und sie befolgen werde.

Unterschrift: ______________________________

Hinweise:

- Überprüfen Sie zunächst, ob Ihr Klausurexemplar vollständig ist. Die Klausur sollte aus 3 Blättern (ohne dieses Deckblatt) mit 6 Aufgaben auf 6 Seiten bestehen.
- Verwenden Sie für Ihre Lösungen ausschließlich die Ihnen zur Verfügung gestellten Papierbögen und kennzeichnen Sie jeden Bogen mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer. Beginnen Sie für jede Aufgabe eine neue Seite.
- Als Hilfsmittel sind zugelassen:
  - drei handschriftlich beschriebene DIN-A4-Blätter,
  - die in der Übung verteilten Verteilungsübersichten (aus Gelman, Carlin, Stern und Rubin (2004)),
  - ein nichtprogrammierbarer Taschenrechner,
  - ein Wörterbuch.
- Maximal können 100 Punkte erreicht werden. Ein nachvollziehbarer Lösungsweg ist Voraussetzung zum Erlangen der vollen Punktzahl. Die Klausur ist mit 45 Punkten bestanden.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. In den ersten 30 Minuten und in den letzten 15 Minuten ist keine vorzeitige Abgabe vorgesehen.
- Bei Unterschleif gilt die Klausur als nicht bestanden und es erfolgt eine Meldung an das Prüfungsamt. Sie sind verpflichtet, durch Ihr Verhalten jegliche Missverständnisse diesbezüglich auszuschließen.
- Legen Sie einen Lichtbildausweis und einen aktuell gültigen Studienausweis bereit.
- Verlassen Sie den Prüfungsraum erst, nachdem Sie der Aufsicht die Klausur persönlich übergeben haben. Für den Eingang der kompletten Klausur bei der Aufsicht sind Sie selbst verantwortlich.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1	22 Punkte

Seien $X_1, \dots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} Be(1, \beta)$ mit $\beta > 0$ mit Dichte

$$f_\beta(x) = \begin{cases} \beta\,(1-x)^{\beta-1}, & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Liegt ein Exponentialfamilie vor? Begründen Sie.

(b) Berechnen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\beta}_{ML}$ für β.

(c) Geben Sie einen suffizienten Schätzer für β an. Begründen Sie Ihre Antwort.

(d) Wann heißt ein Schätzer minimalsuffizient? Wann folgt aus Minimalsuffizienz Suffizienz? Wann folgt aus Suffizienz Minimalsuffizienz? Begründen Sie.

(e) Wann heißt ein Schätzer zulässig?

(f) Angenommen, es existieren nur drei Schätzer für β: T_1, T_2 und T_3. Skizzieren Sie beispielhaft den MSE von T_1, T_2 und T_3, so dass T_1 und T_2 zulässige Schätzer für β sind, aber T_3 ein unzulässiger Schätzer für β ist.

Aufgabe 2	20 Punkte

Seien $X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d}{\sim} Exp(\beta)$ mit unbekanntem Parameter $\beta > 0$. Betrachten Sie für $\beta_0 < \beta_1$ die Hypothesen

$$H_0 : \beta = \beta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \beta = \beta_1.$$

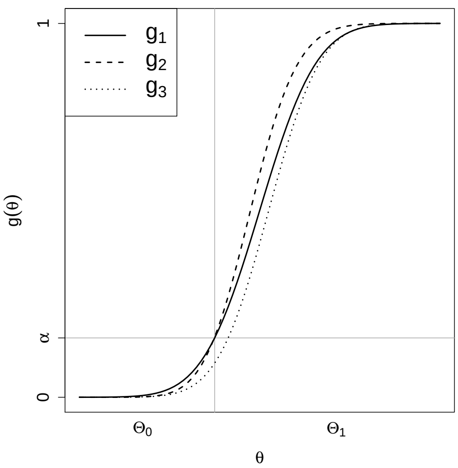
(a) Geben Sie einen gleichmäßig besten Test ϕ^* zum exakten Niveau α an. Ist dieser Test eindeutig? Ist eine Randomisierung erforderlich? Geben Sie die kritische Schranke und gegebenenfalls die Randomisierungskonstante an.
Hinweis: Die Summe von n i.i.d. $Exp(\beta)$-verteilten Zufallsvariablen ist $Ga(n, \beta)$-verteilt.

(b) Sind die Hypothesen H_0 und H_1 in obigem Test als gleichwertig anzusehen? Was bedeutet es, wenn H_0 beibehalten oder abgelehnt wird? Erörtern Sie.

(c) Gegeben seien drei Testfunktionen ϕ_1, ϕ_2 und ϕ_3 für das Testproblem

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \theta \in \Theta_1,$$

wobei $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$. Folgende Grafik zeigt die zugehörigen Gütefunktionen g_1, g_2 und g_3. Welcher Test ist möglicherweise ein UMP-Test zum Niveau α? Begründen Sie.



Aufgabe 3	16 Punkte

Gegeben sei eine normalverteilte Zufallsvariable $X|\sigma^2 \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, wobei μ bekannt und σ^2 unbekannt ist. Es werden n unabhängige Realisationen $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ aus der Verteilung von $X|\sigma^2$ gezogen. Aus diesen Zufallsziehungen soll auf den Parameter σ^2 geschlossen werden.

(a) Bestimmen Sie Jeffreys' Priori für σ^2.

(b) Zu welcher Verteilungsfamilie gehört die Posteriori-Verteilung von $\sigma^2|\boldsymbol{x}$, wenn als Priori für σ^2 Jeffreys' Priori benutzt wird? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Die explizite Berechnung der Posteriori-Dichte wird nicht verlangt, als Beweis aber akzeptiert.

Aufgabe 4	16 Punkte

Gegeben sei eine Binomial-verteilte Zufallsvariable $X|\pi \sim \text{Bin}(\pi)$, wobei π unbekannt ist. Es werden n unabhängige Realisationen $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ aus der Verteilung von $X|\pi$ gezogen. Aus diesen Zufallsziehungen soll auf den Parameter π geschlossen werden. Als Priori-Verteilung für π wird eine Beta-Verteilung angenommen:

$$\pi \sim \text{Beta}(a, b).$$

(a) Zeigen Sie, dass sich als Posteriori-Verteilung von $\pi|\boldsymbol{x}$ wiederum eine Beta-Verteilung ergibt und geben Sie deren Parameter a_{post} und b_{post} an.

(b) Geben Sie die Formeln für zwei mögliche bayesianische Punktschätzer für π an.

(c) Beschreiben Sie kurz, wie Sie vorgehen würden, um die prädiktive Posteriori-Dichte $f(y|\boldsymbol{x})$ einer neuen Beobachtung y zu bestimmen.

(d) Beschreiben Sie eine Möglichkeit, basierend auf der prädiktiven Posteriori-Verteilung von $y|\boldsymbol{x}$ ein bayesianisches $(1-\alpha)$ – Prognoseintervall für die neue Beobachtung y zu bestimmen.

Aufgabe 5	18 Punkte

Gegeben seien Realisationen einer Zählvariablen $y_1, \ldots, y_n$ und Vektoren von p Kovariablen $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$, mit welchen die Realisationen einer Zählvariablen erklärt werden sollen. Für diese Fragestellung bietet sich ein generalisiertes lineares Modell mit folgenden Annahmen an:

- Verteilungsannahme: $y_i|\boldsymbol{x}_i \overset{unabh.}{\sim} \text{Po}(\lambda_i)$
- Linearer Prädiktor: $\eta_i = \boldsymbol{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}$
- Linkfunktion: $\text{E}(y_i|\boldsymbol{x}_i) = \lambda_i = h(\eta_i) = \exp(\eta_i)\,(\Leftrightarrow g(\lambda_i) = \eta_i = \log(\lambda_i))\,.$

Für die bayesianische Inferenz ist außerdem die Spezifizierung einer Priori-Verteilung für $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_p)^\top$ nötig. Wir nehmen im Folgenden eine multivariate Normalverteilung an

$$\boldsymbol{\beta} \sim \text{N}_p(\boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{B}_0).$$

Als Posteriori-Dichte für $\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}$ ergibt sich

$$p(\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}) \propto \exp\left\{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \boldsymbol{x}_i^\top \boldsymbol{\beta} - \exp(\boldsymbol{x}_i^\top \boldsymbol{\beta})\right) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{b}_0)^\top \boldsymbol{B}_0^{-1}(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{b}_0)\right\}.$$

(a) Begründen Sie, wieso in diesem Fall der Metropolis-Algorithmus geeignet ist, um $D = 1000$ Zufallszahlen aus der Posteriori-Verteilung von $\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}$ zu ziehen. Beschreiben Sie den Algorithmus in eigenen Worten oder Pseudocode. Verwenden Sie dabei als Vorschlagsdichte für $\boldsymbol{\beta}_{neu}|\boldsymbol{\beta}_{alt}$ eine multivariate Normalverteilung, die um den Wert der vorherigen Iteration $\boldsymbol{\beta}_{alt}$ zentriert ist und als Kovarianzmatrix die geschätzte Kovarianzmatrix des ML-Schätzers hat:

$$\boldsymbol{\beta}_{neu}|\boldsymbol{\beta}_{alt} \sim \text{N}_p\left(\boldsymbol{\beta}_{alt}, \widehat{\text{Cov}}\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{ML}\right)\right).$$

(b) Geben Sie eine Formel an, um aus diesen Zufallszahlen einen Punktschätzer für $\boldsymbol{\beta}$ zu berechnen.

(c) Beschreiben Sie, wie aus diesen Zufallszahlen ein $(1 - \alpha)$ – Kredibilitätsintervall für β_1 berechnet werden kann.

Aufgabe 6	8 Punkte

Im Folgenden sehen Sie die Anfänge von vier verschiedenen Aussagen (A-D). Ergänzen Sie jeden Anfang passend mit einer der drei angegebenen Möglichkeiten. Es ist jeweils genau eine Aussage richtig. Notieren Sie die passende Ergänzung auf Ihrem Kanzleibogen (keine Begündung notwendig). Sie erhalten für jede richtige Antwort zwei Punkte, **für jede falsche Antwort einen Minuspunkt**. Sie können in dieser Aufgabe maximal 8 und minimal 0 Punkte erreichen.

A. Sei T ein Schätzer, dessen Varianz größer als die Cramer-Rao-Schranke ist. Dann gilt:

(1) T ist UMVU-Schätzer.

(2) T ist kein UMVU-Schätzer.

(3) Es ist keine Aussage darüber möglich, ob T UMVU-Schätzer ist.

B. Sei $h(\theta) = \theta^2$. Dann folgt aus $\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta) \stackrel{d}{\to} N(0, V(\theta))$:

(1) $\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n^2 - \theta^2) \stackrel{d}{\to} N(\theta^2, V(\theta))$

(2) $\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n^2 - \theta^2) \stackrel{d}{\to} N(0, 4\theta^2 V(\theta))$

(3) $\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n^2 - \theta^2) \stackrel{d}{\to} N(0, 2\theta V(\theta))$

C. Die Dirichletverteilung für $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)^T$ spezifiziert eine Verteilung

(1) auf einem $(k-1)$-dimensionalen offenen Simplex.

(2) auf einem k-dimensionalen offenen Simplex.

(3) auf einem k-dimensionalen offenen Rechteck.

D. Die Dirichletverteilung ist konjugiert

(1) zur inversen Gammaverteilung.

(2) zur multivariat-Normal-Inverse-Wishart-Verteilung.

(3) zur Multinomialverteilung.