

*Hinweis:* Nach einer Wiederholung der Begriffe Erwartungstreue, MSE, Konsistenz und Zulässigkeit soll diese Aufgabe im Tutorium selbstständig gelöst werden. Die Lösung wird am Ende vorgestellt.

**Aufgabe 2** (Erwartungstreue, Suffizienz, Minimalsuffizienz, MSE, Konsistenz, Zulässigkeit)

Sei  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$  ein Zufallsvektor mit  $X_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$  für  $i = 1, \dots, n$  und  $\mu$  bekannt. Im Folgenden soll  $\sigma^2$  geschätzt werden, betrachten Sie dazu die Schätzer

$$S^2(\mathbf{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \quad \text{und} \quad V^2(\mathbf{X}) = \frac{1}{n+2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2.$$

- (a) Sind die Schätzer erwartungstreu für  $\sigma^2$ ?
- (b) In Aufgabe 1 wurde bereits gezeigt, dass der Schätzer  $T(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$  suffizient bzw. minimalsuffizient für  $\sigma^2$  ist. Was kann daraus für die (Minimal-) Suffizienz der oben genannten Schätzer geschlossen werden?
- (c) Zeigen Sie, dass für die mittleren quadratischen Fehler gilt:

$$\text{MSE}_{\sigma^2}(S^2(\mathbf{X})) = \frac{2}{n} \sigma^4 \quad \text{und} \quad \text{MSE}_{\sigma^2}(V^2(\mathbf{X})) = \frac{2}{n+2} \sigma^4.$$

- (d) Sind die Schätzer MSE-konsistent für  $\sigma^2$ ?
- (e) Untersuchen Sie  $S^2(\mathbf{X})$  und  $V^2(\mathbf{X})$  auf ihre Zulässigkeit als Schätzer für  $\sigma^2$ .

*Hinweise:*

- $Y \sim N(0, 1) \Rightarrow E(Y) = 0, \quad E(Y^2) = \text{Var}(Y) = 1, \quad E(Y^4) = 3$
- $Z \sim \chi^2(n) \Rightarrow E(Z) = n, \quad \text{Var}(Z) = 2n$