Hinweis: Nach einer Wiederholung der Rao-Blackwellisierung soll diese Aufgabe im Tutorium selbstständig gelöst werden. Die Lösung wird am Ende vorgestellt.

Aufgabe 3 (Rao-Blackwellisierung)

Sei X_i die Anzahl an Anrufen in einer Telefonzentrale in Minute i. Der Betreiber der Firma interessiert sich für die Wahrscheinlichkeit π, dass eine Minute vergeht, in der kein Anruf eingeht. Geht man davon aus, dass $X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} Po(\lambda)$ mit $\lambda > 0$ unbekannt, gilt $\pi = P(X_i = 0) = e^{-\lambda}$.

Ein möglicher - aber schlechter - Schätzer für π ist $U(\boldsymbol{X}) = \mathbb{I}_{\{X_1=0\}}$, also lediglich die Information darüber, ob in der ersten Minute ein Anruf kam.

(a) Zeigen Sie, dass $U(\boldsymbol{X})$ erwartungstreu ist für π.

(b) Zeigen Sie, dass $T(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^n X_i$ suffizient ist für π.

(c) Verbessern Sie den Schätzer $U(\boldsymbol{X})$ mittels Rao-Blackwellisierung.

(d) Ist der resultierende Schätzer $V(\boldsymbol{X})$ wirklich erwartungstreu für π?

Hinweis:

- $\sum_{t=0}^{\infty} \frac{x^t}{t!} = e^x$
- $\sum_{i=1}^n X_i \sim Po(n\lambda)$