

Hinweis: Nach einer allgemeinen Einführung in die Bayes-Statistik soll diese Aufgabe im Tutorium selbstständig gelöst werden. Die Lösung wird am Ende vorgestellt.

Aufgabe 7 (Bayesinferenz: Normalverteilung)

Sei $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$ eine i.i.d. Stichprobe einer normalverteilten Zufallsvariablen $X|\sigma^2 \sim N(\mu, \sigma^2)$ (d.h. μ bekannt) und a priori $\sigma^2 \sim \text{IG}(\alpha, \beta)$ mit $\alpha, \beta > 0$.

- (a) Bestimmen Sie die Posteriori-Verteilung von $\sigma^2|\mathbf{x}$. Was fällt Ihnen dabei auf?
- (b) Geben Sie einen bayesianischen Punktschätzer für σ^2 an.
- (c) *Zusatzaufgabe:* Woraus setzt sich der Posteriori-Erwartungswert zusammen?

Hinweis:

$$\hat{\sigma}_{\text{ML}}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$