Hinweis: Die nachfolgende Aufgabe soll im Tutorium selbstständig gelöst werden. Die Lösung wird am Ende vorgestellt.

Aufgabe 8 (Bayesianische Schätzung des linearen Modells)

Betrachtet wird das lineare Modell in Matrixform

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\epsilon} \sim \mathrm{N}_n\left(\boldsymbol{0}, \sigma^2 \boldsymbol{I}\right),$$

wobei $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_p)^\top$.

Nehmen Sie an, dass $\boldsymbol{\beta}$ bekannt ist. Für σ^2 wird als Priori-Verteilung eine Inverse Gammaverteilung

$$\sigma^2 \sim \mathrm{IG}(a, b)$$

angenommen.

(a) Berechnen Sie die Posteriori-Verteilung von σ^2.

(b) Für welche Parameter a und b der Priori-Verteilung ergibt sich eine flache Priori-Verteilung? Ergibt sich mit dieser Wahl als Modus der Posteriori-Verteilung von σ^2 tatsächlich der ML-Schätzer

$$\widehat{\sigma}^2_{ML} = \frac{1}{n}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})^\top(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}) \quad ?$$

Hinweise:

- Die Dichte einer multivariat normalverteilten Zufallsvariablen $\boldsymbol{Z} \sim \mathrm{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ lautet:

$$f(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{\mu})\right\}.$$

- Die Dichte einer invers gammaverteilten Zufallsvariablen $Z \sim \mathrm{IG}(a, b)$ lautet:

$$f(z) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} z^{-(a+1)} \exp\left(-\frac{b}{z}\right) \quad \text{wobei} \quad z > 0,\ a > 0,\ b > 0.$$

  Der Modus von Z entspricht dann $\mathrm{mode}(Z) = \frac{b}{a+1}$.