



- Einführung: Was ist Statistik?
- 1** **Datenerhebung und Messung**
  - Die Messung
  - Skalenniveaus
- 2 Univariate deskriptive Statistik
- 3 Multivariate Statistik
- 4 Regression
- 5 Ergänzungen

- Statistische Einheit, Untersuchungseinheit
- Grundgesamtheit/ Population
- Teilgesamtheit/ Stichprobe
- Merkmal
- Merkmalsausprägung



„Measurement is the contact of reason with nature“ Henry Margenau (1959)

„In its broadest sense, measurement is the assignment of numerals to objects or events according the rules“

Lit.: „Measurement theory and practice: The world through quantification“  
David J. Hand, Arnold 2004

Messen bedeutet die Zuordnung von Zahlen zu Ausprägungen von Merkmalen an Objekten.

- Physikalische Messung  
Beispiele: Gewicht, Blutdruck, Fettaufnahme
- Psychologie  
Beispiele: Intelligenz, Gewaltbereitschaft
- Wirtschaftswissenschaften  
Beispiele: Inflation, Bruttosozialprodukt

# Definition

---

Peter	→	1.84
Stefan	→	1.91
Laura	→	1.72

Merkmal definiert Relation (Struktur) zwischen den Objekten.

Messung: strukturerhaltende Abbildung (Homomorphismus)

Peter ist kleiner als Stefan  $\Leftrightarrow 1.84 < 1.91$



# Typen von Messungen

---

- 1 Messung hat reales (physikalisches) Relativ; direkte Messung („representational measurement“)  
z.B. Länge, Gewicht, Anzahl, Blutzucker, etc.
- 2 Messung besitzt durch Operationalisierung definiertes Relativ; indirekte Messung („pragmatic measurement“), Operationale Messung  
z.B. Intelligenz, Schwere einer Krankheit



Homomorphe Abbildung

empirisches Relativ  $\Rightarrow$  numerisches Relativ

Existenz: Ist die Struktur der Objekte so, dass eine strukturerhaltende Abbildung existiert?  
 $\Rightarrow$  Axiome von Repräsentationstheoremen müssen erfüllt sein (z.B. Transitivität o.ä.)

Eindeutigkeit: Gibt es mehrere zulässige Skalen?  
(z.B. Länge in cm, m; Temperatur in  $^{\circ}\text{C}$  oder K)  
 $\Rightarrow$  Zulässige (strukturerhaltende) Transformationen

# Skalentypen (Messniveaus)

---

Die Skalentypen sind durch die Struktur des empirischen Relativs gegeben. Charakterisierung durch zulässige Transformationen.

- Existenz ist nicht immer gegeben
- Eindimensionalität könnte verletzt sein



- Beispiele:  
Diagnosen, Geschlecht
- Struktur:  
keine
- Mögliche Aussagen:  
gleich, ungleich
- Erlaubte Transformationen:  
alle eindeutigen Transformationen

$$a = b \Leftrightarrow f(a) = f(b)$$



# Ordinal- oder Rangskala

---

- Beispiele:  
Schulbildung, soziale Schicht, Schweregrad einer Erkrankung
- Struktur:  
lineare Ordnung
- Mögliche Aussagen:  
gleich, ungleich, größer, kleiner
- Erlaubte Transformationen:  
alle positiv monotonen Transformationen

$$a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$$



- Beispiele:  
Ergebnisse psychometrischer Tests, Scores, Schulnoten?, Häufigkeit der Kommunikation, physiologische Daten (EKG)
- Struktur:  
Abstände definiert mit Axiomen
- Mögliche Aussagen:  
gleich, ungleich, größer, kleiner, Differenzen
- Erlaubte Transformationen:  
alle linearen Transformationen  $y = ax + b$

$$f(x_1) - f(x_2) = f(x_3) - f(x_4) \Leftrightarrow x_1 - x_2 = x_3 - x_4$$



## Intervallskala mit Nullpunkt

- Beispiele:  
Fernsehdauer, Preis, Länge, Gewicht
- Struktur:  
Abstände definiert, Nullpunkt
- Mögliche Aussagen:  
gleich, ungleich, größer, kleiner, Differenzen, Verhältnis
- Erlaubte Transformationen:  
 $y = ax$  (Multiplikation)

$$\frac{f(x_1)}{f(x_2)} = \frac{x_1}{x_2}$$

- Beispiel:  
Häufigkeit
- Struktur:  
Einheit liegt auf natürliche Weise fest
- Erlaubte Transformationen:  
keine

Beachte:

- Je höher das Skalenniveau, desto mehr Interpretationen sind möglich
- Sinnvoll interpretierbare Berechnungen sollen invariant bezüglich der zulässigen Transformationen sein

Skalenart	sinnvoll interpretierbare Berechnungen			
	auszählen	ordnen	Differenzen bilden	Quotienten bilden
nominal	ja	nein	nein	nein
ordinal	ja	ja	nein	nein
intervall	ja	ja	ja	nein
verhältnis	ja	ja	ja	ja

# Skalentransformationen

Beispiel: Konzentration von Bakterien

$$\begin{array}{rcl} 3 \cdot 10^{-3} & & \log(3 \cdot 10^{-3}) \\ 2 \cdot 10^{-4} & \text{oder} & \log(2 \cdot 10^{-4}) \\ 2.2 \cdot 10^{-5} & & \log(2.2 \cdot 10^{-5}) \end{array}$$

Beispiel: Tumorgröße

$$\begin{array}{rcl} 4\text{mm}^3 & & ? \\ 10\text{mm}^3 & \text{oder} & ? \\ 2\text{mm}^3 & & ? \end{array}$$

Skalenwahl  $\Leftrightarrow$  Interpretation der Differenz

Bei log-Skala: Differenz = Faktor der Veränderung

Verwende log zur Basis 10

# Gütekriterien der Messung

---

Genauigkeit (Accuracy)

Messfehlermodelle: Es gibt einen wahren Wert  $X$  und eine Messung  $X^*$   
z.B.

$$X^* = X + \underbrace{U}_{\text{Messfehler}}$$

$$\mathbb{E}(U) = 0$$

⇒ klassischer additiver Messfehler

Modell der klassischen (psychologischen) Testtheorie

Aspekte:

- Validität = Gültigkeit
- Reliabilität = Zuverlässigkeit

Frage: Wird das gemessen, was gemessen werden soll?

In der emp. Sozialforschung:

- Inhaltsvalidität
- Kriteriumsvalidität
- Konstruktvalidität

Statistik: systematischer Messfehler?  $\mathbb{E}(U) = 0$



Ist die Messung zuverlässig?

Erhält man bei Wiederholung den gleichen Wert?

Erhält man unter verschiedenen Bedingungen den gleichen Wert?

→ Interrater Reliabilität

Abhängig von:

Verhältnis von Streuung des Messfehlers zur Gesamtstreuung

$$r = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_{X^*}^2} = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2 + \sigma_U^2}$$

$\sigma_X^2, \sigma_{X^*}^2$  Varianz von  $X$  bzw.  $X^*$

→ Interne Konsistenz: Cronbachs Alpha (später)

Bildung von Einzelindikatoren zu einer neuen Variablen

Häufig: Bildung von (gewichteten) Summen von einzelnen Variablen

Beispiel:

$$\text{Pflege-Qualität} = a_1 \cdot Q(\text{Essen}) + a_2 \cdot Q(\text{Medizinische Versorgung}) + \dots$$

Indexbildung folgt nur theoretischen Vorgaben und fachspezifischen Überlegungen

Fragen der Statistik:

- Gleichheit sinnvoll ? (Dimensionsreduktion zulässig)
- Ordnung bzw. Abstände sinnvoll ?

# Skalierungsverfahren mit latenten Variablen

---

Grundlage: Modell mit latenter Größe, die das Antwortverhalten oder Lösen von Aufgaben bestimmt

Wichtigste Beispiele :

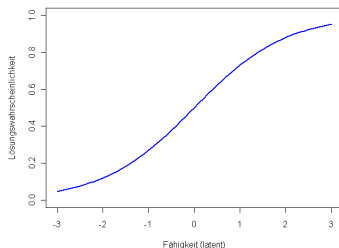
- Likert Skalen
- Faktorenmodell
- Rasch - Modell



# Itemcharakteristik

Grundidee: Wahrscheinlichkeit von Lösung der Aufgabe bzw. Antwort „Ja“ hängt von der latenten Variable ab.

$$P(\text{Item gelöst}) = G(\text{latente Größe})$$



Je größer die Fähigkeit desto größer die Lösungswahrscheinlichkeit

# Ausblick: Statistische Verfahren zur Überprüfung der Messung (Skalierung)

---

- Itemanalyse
- Rasch-Modell
- Faktorenanalyse
- Analyse von Wiederholungs- und Mehrfachmessungen
- Messfähigkeitsanalyse in der Qualitätskontrolle

Weiter: Verfahren zur **Berücksichtigung** von Messfehlern



# Rasch-Modell

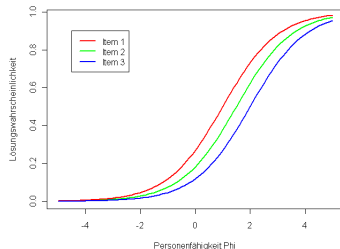
Items haben verschiedene Schwierigkeiten

Lösungswahrscheinlichkeiten lassen sich durch Personenfähigkeit und Itemschwierigkeit beschreiben:

$$P(\text{Item gelöst}) = G(\Phi_i - b_j)$$

$\Phi_i$  : Fähigkeit von Person i

$b_j$  : Itemschwierigkeit



Lit.: Carolin Strobl (2010): Das Rasch-Modell, Rainer-Hampp-Verlag.

# Merkmalstypen: Stetige und diskrete Merkmale

---

- **Diskretes Merkmal** endlich oder abzählbar unendlich viele verschiedene Werte  
Beispiele: Geschlecht, Kinderanzahl,...
- **Stetiges Merkmal**  
alle Werte eines Intervalls können angenommen werden  
Beispiele: Zeitdauern, Größe, Gewicht,...



- **Quasi-stetiges Merkmal**  
diskret, sehr kleine Einheiten, „praktisch“ stetig.  
Beispiel: Monetäre Größen in Cent, usw.
- **Gruppierte Daten, Häufigkeitsdaten:** stetiges oder quasi-stetiges Merkmal  $X$   
Wertebereich wird in Gruppen (Klassen, Kategorien) eingeteilt.  
Beispiele: Gehalt in Gehaltsklassen, Alter in Altersklassen  
Bemerkung: Gruppierung dient auch dem Datenschutz!



# Datengewinnung und Erhebungsarten

---

- Vollerhebung:  
Alle statistischen Einheiten der Grundgesamtheit werden untersucht („erhoben“).
- Stichprobe = Teilerhebung
- Zufallsstichprobe:  
statistische Einheiten der Stichprobe werden zufällig nach einem bestimmten Mechanismus gezogen  
Mehr dazu in Statistik II (induktive Statistik) und in der Vorlesung Stichprobenverfahren
- Bewusste Auswahlverfahren „Expertenauswahl“
- Quotenauswahl

Induktive Statistik in der Regel nur mit zufälliger Stichprobe möglich!



- **Querschnittsdaten:**  
Ein oder mehrere verschiedene Merkmale werden an einer Reihe von Objekten einmal erhoben (zu einem bestimmten Zeitpunkt oder in einem bestimmten Zeitraum)
- **Zeitreihe**  
Beispiele: Aktienkurse, Wirtschaftsentwicklung
- **Longitudinal-, Längsschnitt- oder Paneldaten:**  
Ein oder mehrere Merkmale werden mehrmals zu verschiedenen Zeitpunkten an einer Reihe von Objekten erhoben.  
Beispiel: Sozioökonomisches Panel

- Kohortenstudien: Längsschnittstudien (Retrospektiv oder prospektiv)  
Beispiel: EPIC Studie (European Prospective Investigation into Cancer) 400000 Personen in neun europäischen Ländern
- Fall - Kontroll-Studien Erhebung von erkrankten (Fälle) und Kontrollen  
Beispiel: Deutsche Radon Studie
- Querschnittsstudien  
Beispiel: 1997 - 1999 Erstes gesamtdeutsches Gesundheitssurvey (7124 Personen)

Es werden in der Regel verschiedene „Behandlungen“ verglichen  
Experimentator greift ein

- Randomisierte klinische Studie: Zuordnung von Einheiten zu Behandlungen erfolgt durch Losverfahren (Randomisierung)
- Randomisierte Experimente (Produktion, Landwirtschaft ) (Vorlesung Versuchplanung)
- Experimente in Medizin und Biologie
- Naturwissenschaftliche Experimente mit zufälligen Komponenten