Aufgabe 1

Es seien eine Grundgesamtheit $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ und eine Funktion $P : \mathcal{P} \to [0,1]$ (mit $\mathcal{P}$ der Potenzmenge von Ω) mit

$$P(\{\omega_i\}) = p_i \quad \forall i = 1, \ldots, n \text{ und } \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

sowie

$$P(A) = \sum_{i:\omega_i \in A} p_i$$

gegeben. Zeigen Sie, daß P eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf Ω ist.

Aufgabe 2

Seien A und B beliebige Ereignisse mit $P(A) = 3/4$ und $P(B) = 1/3$. Zeigen Sie:

$$\frac{1}{12} \leq P(A \cap B) \leq \frac{1}{3}.$$

Was kann man für $P(A \cup B)$ folgern?

Aufgabe 3

(a) Beweisen oder widerlegen Sie: Falls $P(A) = P(\bar{B}) \Rightarrow \bar{A} = B$.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie: Falls $P(A) = 0 \Rightarrow P(A \cap B) = 0$.

(c) Die Menge Ω der Elementarereignisse sei die Menge aller nichtnegativen ganzen Zahlen. Bezeichne ω_n das Ereignis, das im Auftreten der Zahl n bestehe. Außerdem gelte $P(\{\omega_n\}) = c/n!$. Wie groß muß c sein, damit P eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist?

Aufgabe 4

Die Eingänge eines Ladens sind mit einer Alarmanlage gegen Diebstahl gesichert. Wenn ein Dieb die Anlage passiert, wird mit W'keit 0.995 Alarm ausgelöst. Bei einem unbescholtenen Kunden beträgt die W'keit 0.006. Erfahrungswerte zeigen, daß auf 500 Kunden ein Dieb kommt.

(a) Mit welcher W'keit alarmiert die Anlage zu Recht? Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden harmlose Kunden erschreckt?

(b) Wie groß müßten die W'keiten für korrekten und falschen Alarm seien, damit zumindest die Hälfte der Kompromittierten tatsächlich Diebe sind?

Aufgabe 5* (Abgabe bis Dienstag, 26.04, 12:00 Uhr (s.t.) über Moodle möglich)

Trotz Anschnallpflicht legen 15% aller Autofahrer keinen Gurt an. Eine Krankenversicherung ermittelte, dass bei Verkehrsunfällen von PKW-Fahrern nur 8% schwere Kopfverletzungen aufwiesen, wenn die Fahrer angeschnallt waren. Bei nicht angeschnallten Fahrern trugen 62% keine schwere Kopfverletzung davon.

Betrachten Sie die Ereignisse

- A: Fahrer war angegurtet
- K: Unfallverletzter PKW-Fahrer weist schwere Kopfverletzung auf

(a) Interpretieren Sie das Ereignis $\bar{A} \cap K$ und berechnen Sie $P(\bar{A} \cap K)$.

(b) Sind die Ereignisse $\bar{A}$ und K stochastisch unabhängig?

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Autofahrer nicht angegurtet war, wenn eine schwere Kopfverletzung diagnostiziert wurde?