Einführung in die stochastischen Prozesse

Vorlesung mit Übung von

Sonja Greven und David Rügamer
Institut für Statistik
Ludwig-Maximilians-Universität München

Sommersemester 2016

Literatur & Unterlagen

- Vorlesungsskript, Folien und Formelsammlung auf der Moodleseite der Veranstaltung:

  `https://www.elab.moodle.elearning.lmu.de/course/view.php?id=982`

- Fahrmeir, L., Kaufmann, H. und Ost, F.: Stochastische Prozesse. Hanser Verlag München, 1981. (Kopiervorlage auf Anfrage erhätlich).

- Billingsley, P.: Probability and measure. Wiley, New York (2nd ed.), 1986

- Karlin, S. und Taylor, H. M.: A first course in stochastic processes. Academic Press, 1975.

- Guttorp, P.: Stochastic Modeling of Scientific Data. Chapman & Hall, 1995.

Ziel der Vorlesung

- Grundannahme vieler statistischer Verfahren: Stochastische Unabhängigkeit der Beobachtungen.

- Stochastische Prozesse: Modelle zur statistischen Analyse bei abhängigen Daten.

- In dieser Vorlesung:
  - Überwiegend zeitliche Abhängigkeit.

    (Räumliche Abhängigkeit $\Rightarrow$ Vorlesung Räumliche Statistik).

    Unterschied zur Zeitreihenanalyse (Zeit diskret, Zustandsraum stetig):
    Oft diskrete Daten in stetiger oder diskreter Zeit.
  - Vorstellung verschiedener Modellklassen von stochastischen Prozessen.
  - Inferenzkonzepte.
  - Beispiele aus verschiedenen Anwendungsbereichen.

Scheinerwerb

Klausur am Ende des Semesters.

- Vorschlag: am 18.07.2016 von 10:00-12:00 Uhr
- 90 Minuten
- Zugelassene Hilfsmittel: Formelsammlung mit handschriftlichen Notizen auf den Vorderseiten, Taschenrechner und Wörterbuch
- Inhalte von Vorlesung **und** Übung sind relevant. Die Hausübungen stellen eine zusätzliche Übungs- und Vertiefungsmöglichkeit dar.

Überblick

Kapitel 1: Einführung und Beispiele

- Einführende Beispiele
- Erste Definition stochastischer Prozesse
- Einige spezielle stochastische Prozesse
- Einführung erster Grundbegriffe

Kapitel 2: Grundbegriffe der allgemeinen Theorien stochastischer Prozesse

- Definitionen stochastischer Prozesse
- Verteilung eines stochastischen Prozesses
- Eigenschaften stochastischer Prozesse

Kapitel 3: Markov-Ketten

Kapitel 4: Diskrete Markov-Prozesse

Kapitel 5: Erneuerungs- und Semi-Markov-Prozesse

Ausblick: Spezielle stochastische Prozesse

Kapitel 6: Martingale

Kapitel 7: Punkt- und Zählprozesse

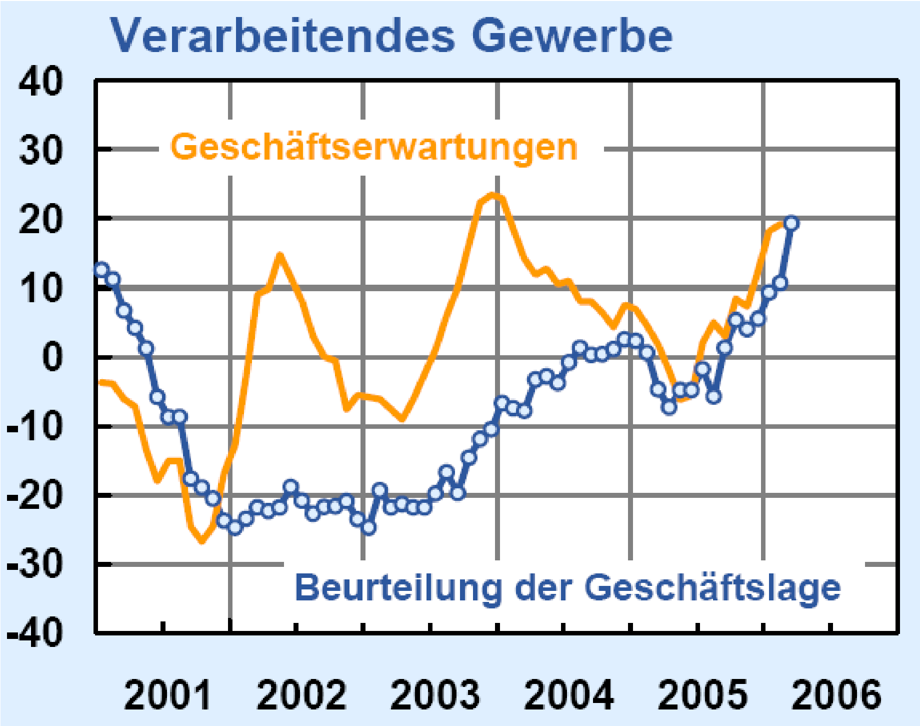
Kapitel 8: Markov-Prozesse mit stetigem Zustands- und Parameterraum

wird von Dr. Holger Fink nach dem SoSe als Block angeboten.
Vorschlag: 22.-25.8.16.

Kapitel 1
Einführung und Beispiele

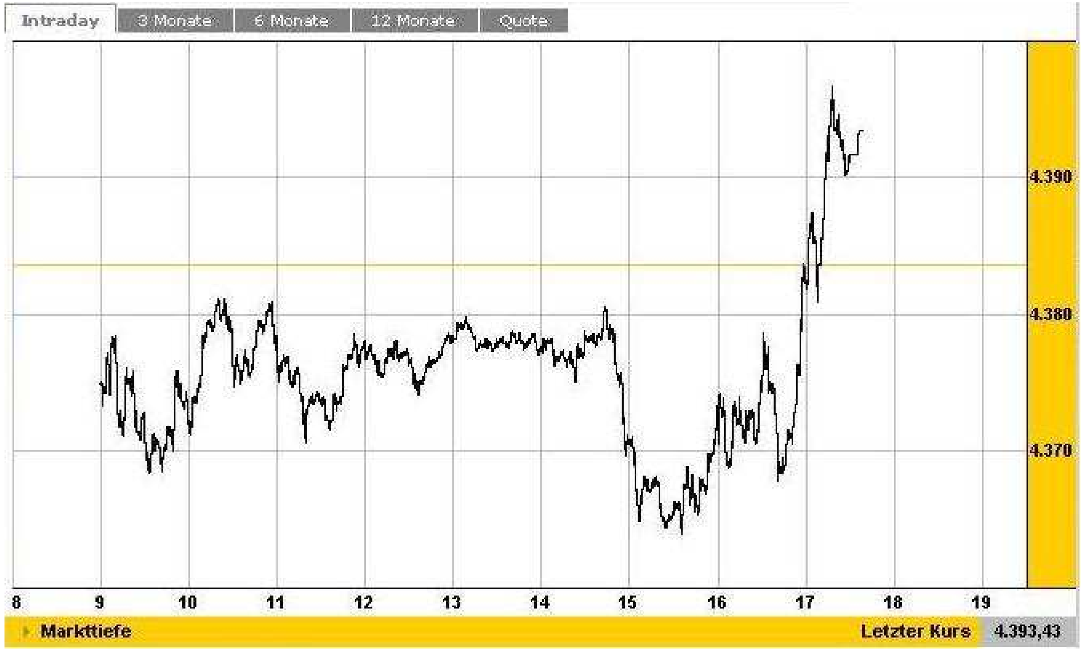
1.1 Einführende Beispiele und erste Definition

- Rein zeitliche Beispiele:
  - IFO Geschäftsklima Index



Zeit: diskret; Zustandsraum: stetig.

– Aktienkurse (Inter-Tagesdaten)

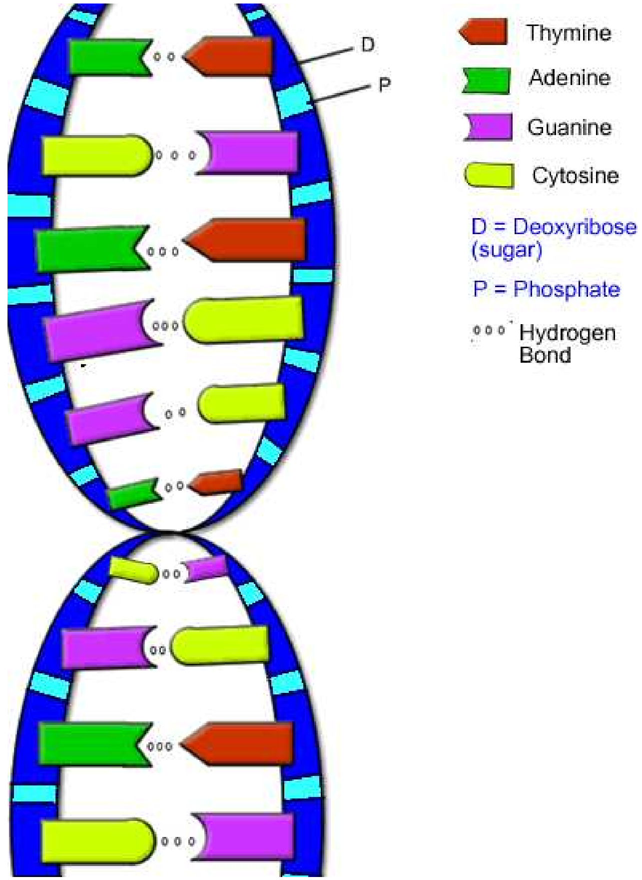


Zeit: stetig; Zustandsraum: stetig.

– Individuelle Arbeitslosigkeitsverläufe

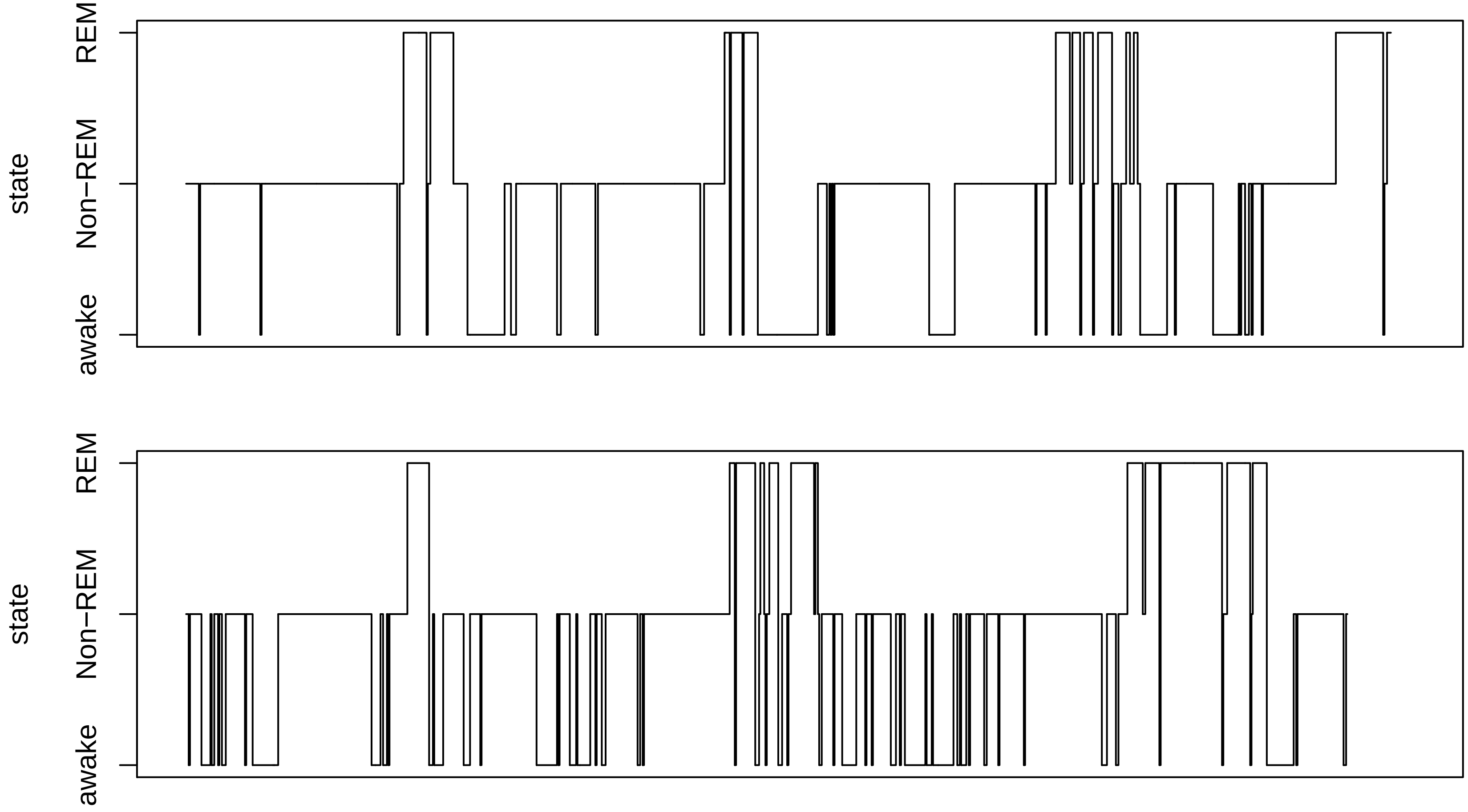
Zeit: diskret; Zustandsraum: binär / kategorial.

– DNA-Sequenzen



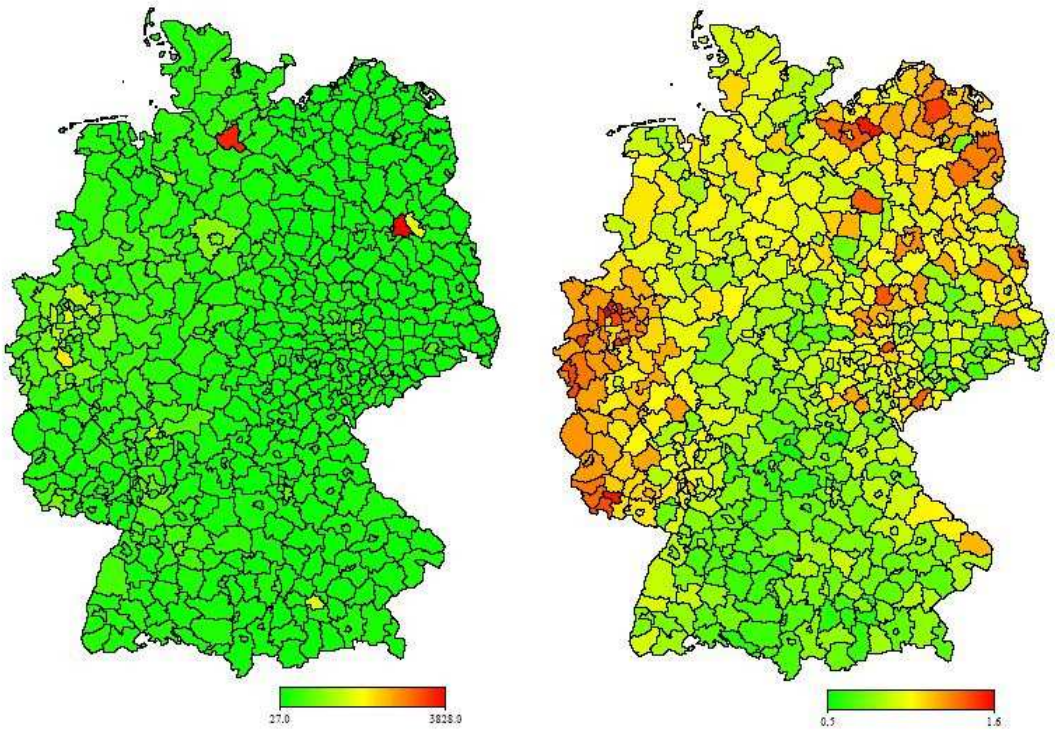
"Zeit": diskret; Zustandsraum: diskret.

– Schlafzustände



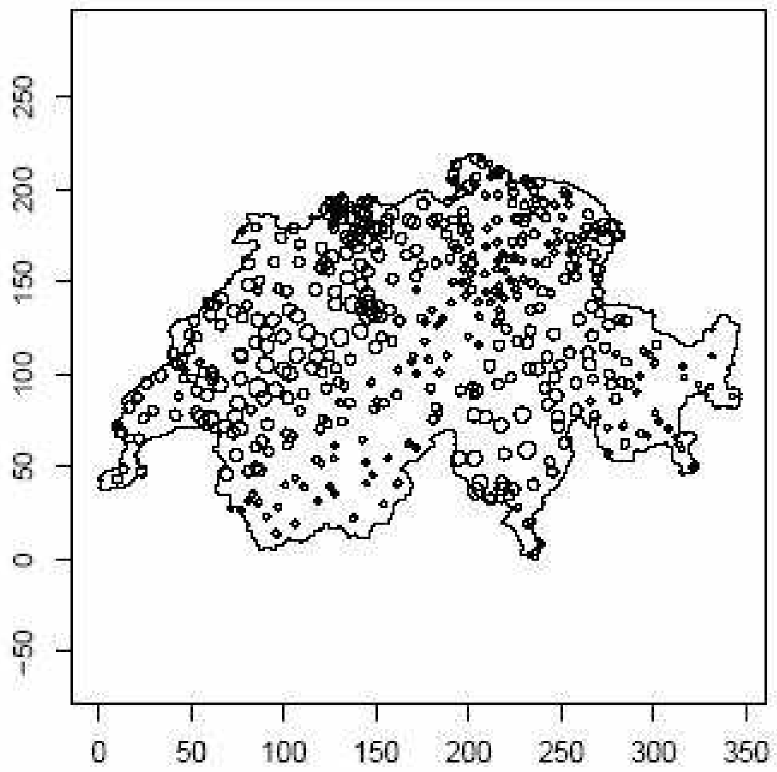
Zeit: stetig; Zustandsraum: diskret.

- Rein räumliche Beispiele:
  - Krebsatlas



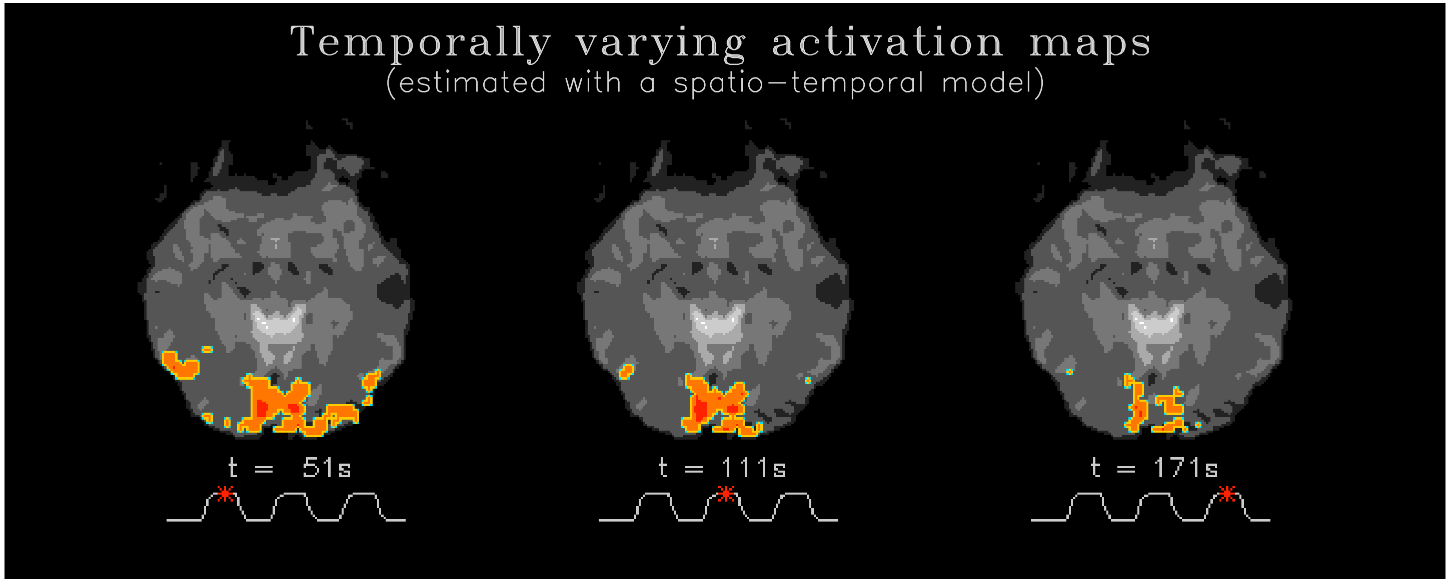
Raum: diskret; Zustandsraum: diskret.

– Schweizer Regenfalldaten



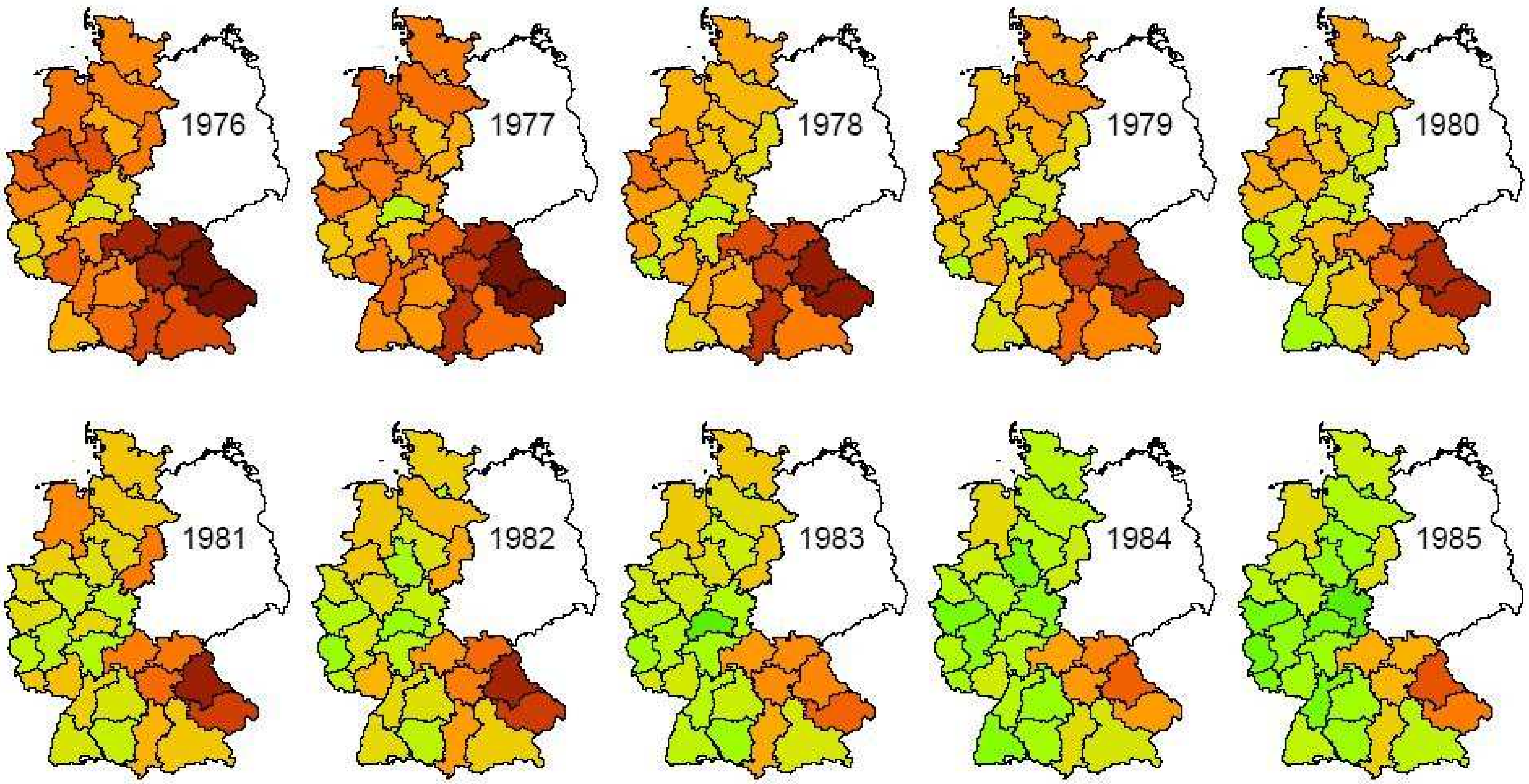
Raum: stetig; Zustandsraum: stetig.

- Räumlich-zeitliche Beispiele:
  - fMRI-Daten



Zeit: diskret, Raum: diskret, Zustandsraum: stetig.

– Krebsatlas



Zeit: diskret; Raum: diskret; Zustandsraum: diskret.

- Allgemein: Realisierungen von Zufallsvariablen X_t, $t \in T$, mit einer geeigneten Indexmenge T, z.B. mit

$$
\begin{array}{ll}
T \subseteq \mathbb{N}_0,\ \mathbb{R}_+ & \text{(Zeit)}, \\
T \subseteq \mathbb{Z}^2 & \text{(räumliches Gitter)}, \\
T \subseteq \mathbb{R}^2 & \text{(Raum, kontinuierliche Teilmenge)}, \\
T \subseteq \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{N}_0 & \text{(Raum–Zeit)}.
\end{array}
$$

- Definition: Stochastischer Prozess als Familie von Zufallsvariablen

  Eine Familie $\{X_t,\ t \in T\}$ von Zufallsvariablen heißt stochastischer Prozess. Die Indexmenge T heißt Parameterraum, der Wertebereich S der Zufallsvariablen heißt Zustandsraum.

- Genauer nimmt man an:

  $X_t :\ (\Omega, \mathcal{F}, P) \longrightarrow (S, \mathcal{S})$ Zufallsvariable für alle t

  $\mathcal{S}$ σ–Algebra auf S

  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ Wahrscheinlichkeitsraum

  $\Rightarrow \quad X = \{\Omega, \mathcal{F}, P, \{X_t,\ t \in T\}\}$ stochastischer Prozess

1.2 Spezielle Stochastische Prozesse

1.2.1 Irrfahrten (Random Walks)

- Diskrete einfache Irrfahrt auf der Geraden:
  - Start in $X_0 = 0$ (Zeit $t = 0$).
  - Bewegung: $(t = 1, 2, \ldots)$

    Ein Schritt nach rechts mit Wahrscheinlichkeit p

    Ein Schritt nach links mit Wahrscheinlichkeit q

    Verbleiben im Zustand mit Wahrscheinlichkeit r

    $p + q + r = 1.$
  - X_t Position nach t-tem Schritt.

- Alternative Darstellung:
  - $\{Z_t,\, t = 1, 2, ...\}$ i.i.d. Folge von Zufallsvariablen für t-ten Schritt.
  - $Z_t \in \{-1, 0, 1\}$

$$\begin{aligned} P(Z_t = -1) &= q \\ P(Z_t = 0) &= r \\ P(Z_t = 1) &= p \end{aligned}$$

  - Definition von X_t:

$$\begin{aligned} X_0 &= 0 \\ X_t &= Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_t \end{aligned}$$

bzw.

$$X_t = X_{t-1} + Z_t, \quad t \geq 1$$

- Formale Definition:
  - Die Folge $X = \{X_t,\ t \in \mathbb{N}_0\}$, mit $X_t = X_{t-1} + Z_t$, heißt (einfache) Irrfahrt auf der Geraden.
  - $\{X_t,\ t \in \mathbb{N}_0\}$ ist ein stochastischer Prozess mit $T =$ und $S =$.
  - Zugrundeliegender Ergebnisraum Ω mit Ergebnissen ω:

    ω Folge der Realisierungen von $Z_1, Z_2, \ldots$, z.B.

$$
\begin{aligned}
\omega &= (1, 1, -1, 1, 1, 0, 0, 1, -1, \ldots) \\
&= (Z_1(\omega) = 1, Z_2(\omega) = 1, Z_3(\omega) = -1, \ldots)
\end{aligned}
$$

    $\Rightarrow \Omega = \{-1, 0, 1\}^{\mathbb{N}}$.
  - Die durch (t, X_t) gebildete Treppenfunktion heißt Pfad, Trajektorie oder Realisierung des Prozesses.

- Spezialfälle:

$$r = 0 \qquad \text{kein Unentschieden}$$

$$p = q = \frac{1}{2} \qquad \text{faires Spiel, symmetrische Irrfahrt}$$

- Modifikation: Absorbierende Schranken

Interpretation: Spieler A mit Anfangskapital $a > 0$
Spieler B mit Anfangskapital $b > 0$
X_t Gewinn von A nach t Spielen
$\{X_t = -a\}$ Ruin von A ("Gambler's ruin")
$\{X_t = b\}$ Ruin von B.

Ziel: Berechnung von Ruin- bzw. Gewinnwahrscheinlichkeiten.

Gewinnwahrscheinlichkeit bei $p = q = \frac{1}{2}$ ist

$$\text{für } A: \quad P_A = \frac{a}{a+b} \quad \text{und für } B: \quad P_B = \frac{b}{a+b}$$

Allgemeinere Gewinnwahrscheinlichkeiten ⇒ Übung.

- Markov–Eigenschaft der diskreten Irrfahrt:

$$P(X_{t+1} = j \quad | \quad X_t = i, X_{t-1} = i_{t-1}, X_{t-2} = i_{t-2}, \ldots, X_1 = i_1) =$$
$$P(X_{t+1} = j \quad | \quad X_t = i).$$

Interpretation: Die Zukunft X_{t+1} ist bei bekannter Gegenwart X_t (bedingt) unabhängig von der Vergangenheit $X_{t-1}, \ldots, X_1$.

- Ungerichtete Form der Markov–Eigenschaft:

$$P(X_t = i | X_{s \neq t}) = P(X_t = i | X_{t+1} = i_{t+1}, X_{t-1} = i_{t-1})$$

- Zwei–dimensionale symmetrische Irrfahrt

$$\begin{aligned} X_t &= (X_{1t}, X_{2t}) \in \mathbb{Z}^2 = S \\ X_{t+1} &= X_t + Z_t \ ; \\ Z_t &\in \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

mit

$$P\left(Z_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \ldots = P\left(Z_n = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{4}$$

- Allgemeine Irrfahrt (Random Walk):

  $\{Z_t,\ t \in \mathbb{N}\}$ iid Folge, Z_t beliebig verteilt.

- Gauß-Irrfahrt:

  $\{Z_t,\ t \in \mathbb{N}\}$ iid $N(0, \sigma^2)$, "Gauß'sches Weißes Rauschen"

Markov–Eigenschaft:

$$f(x_t \mid X_{t-1} = x_{t-1}, \ldots, X_1 = x_1) = f(x_t \mid X_{t-1} = x_{t-1}) \quad \sim \quad N(x_{t-1}, \sigma^2)$$

$$\text{bzw.} \quad X_t \mid X_{t-1}, \ldots, X_1 \sim X_t \mid X_{t-1} \quad \sim \quad N(X_{t-1}, \sigma^2)$$

- Autoregressiver Prozess der Ordnung 1 ($AR(1)$)

$$X_t = \rho X_{t-1} + Z_t, \quad Z_t \text{ i.i.d.}$$

- Autoregressiver Prozess der Ordnung p ($AR(p)$)

$$X_t = \rho_1 X_{t-1} + \ldots + \rho_p X_{t-p} + Z_t, \quad Z_t \text{ i.i.d.}$$

- Gauß-Prozesse, falls Z_t i.i.d. $N(0, \sigma^2)$.

- Markov-Eigenschaft:

  Für $AR(1)$:

$$X_t \mid X_{t-1}, \dots, X_1 \sim X_t|X_{t-1} \sim N(\rho X_{t-1}, \sigma^2)$$

  Für $AR(p)$:

$$X_t \mid X_{t-1}, \dots, X_1 \sim X_t \mid X_{t-1}, \dots, X_{t-p} \sim N(\mu_t, \sigma^2)$$

  mit

$$\mu_t = \rho_1 X_{t-1} + \ldots + \rho_p X_{t-p}$$

- Räumliche Markov-Prozesse

  $\{X_s,\ s=(i,j)\in\mathbb{Z}^2\}$ heißt räumlicher (Gitter-)Prozess oder Zufallsfeld.

  Beispiele:

  – $X_{ij}\in\{0,1\}$ Indikatorvariablen, z.B.

$$X_{ij}=\begin{cases}1 & \text{archäologischer Fund in } (i,j)\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

  – $X_s \in \{0,1,2,\ldots\}$ Zählvariable, z.B. Anzahl von Krebserkrankungen in Landkreisen; irreguläres Gitter.

  – X_{ij} stetig verteilt, z.B. Graustufe/Farbe in der Bildanalyse

- Räumliche Markov–Eigenschaft

$$f(x_{ij}|\{X_{kl},\ (k,l)\neq(i,j)\})=f(x_{ij}|\{X_{kl},\ (k,l)\sim(i,j)\})$$

  $\sim$: "Nachbar von"

1.2.2 Wiener Prozess

- Stochastisches Modell für die Brown'sche Bewegung (zeitstetige Irrfahrt kleiner Teilchen in homogener, ruhender Flüssigkeit).

  Irrfahrt kommt durch zufälliges Zusammenstoßen mit Molekülen der Flüssigkeit zustande.

  Parameterraum $T = \mathbb{R}_+$.

  Zustandsraum $S = \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$).

  Bezeichnung: $W = \{W_t,\ t \in \mathbb{R}_+\}$ oder $\{W(t),\ t \in \mathbb{R}_+\}$

- Wichtiger Baustein zur Modellierung von Wertpapierpreisen mit Anwendung in der Optionsbewertung (Black-Scholes-Regel):

  Bezeichne $P_0(t)$ den Preis eines risikolosen Wertpapiers (z.B. Sparguthaben) zum Zeitpunkt t. Bei stetiger Verzinsung mit konstantem Zinssatz r gilt:

$$\begin{aligned} P_0(t) &= P_0(0)e^{rt} \\ \ln P_0(t) &= \ln P_0(0) + rt \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ loglinearer Ansatz für Aktienkurse:

$$\ln P(t) = \ln P(0) + rt + W(t),$$

$W(t)$ regelloser Fehler in stetiger Zeit.

- Wiener-Prozess als Grenzfall von Irrfahrten

  $X(t)$ symmetrische diskrete Irrfahrt, $X(0) = 0$.

  Bewegungen zu den Zeitpunkten $n\Delta t$, $n = 1, 2, \ldots$ um $\pm\Delta x$.

$$\begin{aligned} X(t) &= \text{Lage des Teilchens für } t = n\Delta t \\ &= \sum_{k=1}^{n} Z_k \end{aligned}$$

Z_k i.i.d. mit $\begin{cases} P(Z_k = +\Delta x) = \frac{1}{2} \\ P(Z_k = -\triangle x) = \frac{1}{2} \end{cases}$

$$\begin{aligned} E(Z_k) &= 0 \\ Var(Z_k) &= (\Delta x)^2 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \qquad \begin{aligned} E(X(t)) &= 0 \\ Var(X(t)) &= (\Delta x)^2 n = \underbrace{\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}}_{=:\sigma^2} t \end{aligned}$$

Grenzübergang $n \to \infty$ ($\Delta t \to 0, \Delta x \to 0$), so dass

$$\sigma^2 := \frac{(\triangle x)^2}{\triangle t}, \quad 0 < \sigma^2 < \infty$$

konstant bleibt.

Zentraler Grenzwertsatz

$$\Longrightarrow \quad X(t) \sim N(0, \sigma^2 t) \quad \text{für } n \longrightarrow \infty.$$

- Vor dem Grenzübergang gilt
  - Zuwächse $X(t) - X(s)$, $X(v) - X(u)$, mit $u < v < s < t$ sind unabhängig (zusammengesetzt aus getrennten i.i.d. Teilsummen)
  - Zuwächse $X(t+s) - X(s)$ sind stationär (Verteilung hängt nur von der Zeitdifferenz ab):

$$X(t+s) - X(s) \quad \sim \quad X(t) - X(0) \quad \sim \quad N(0, \sigma^2 t)$$

  - Plausibel: Unabhängigkeit und Stationarität der Zuwächse überträgt sich auf Grenzprozess für $n \longrightarrow \infty$. Exakter Beweis aber schwierig.

    $\Rightarrow$ Axiomatischer Zugang

- "Herleitung" des Wiener-Prozesses als Grenzfall von Irrfahrten funktioniert auch für allgemeine "symmetrische" Irrfahrten, z.B. mit

$$Z_k \sim N(0, \sigma^2 \Delta t), \quad t = n\Delta t$$

- Axiomatische Definition des Wiener-Prozesses

  Ein stochastischer Prozess $W = \{W(t), t \in \mathbb{R}_+\}$, $S = \mathbb{R}$, heißt Wiener-Prozess, wenn gilt:

(W1) Die Zuwächse sind normalverteilt und stationär:

$$W(s+t) - W(s) \quad \sim \quad N(0, \sigma^2 t) \quad \text{für alle } s, t \geq 0.$$

(W2) Für alle $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n,\ n \geq 3$ sind die Zuwächse

$$W(t_2) - W(t_1),\ \ldots,\ W(t_n) - W(t_{n-1})$$

unabhängig.

(W3) $W(0) = 0$.

(W4) Die Pfade sind stetig.

- Bemerkungen:
  - Für $\sigma^2 = 1$ heißt der Wiener–Prozess normiert.
  - (W3) ist Anfangsbedingung. Addition von c liefert

$$\tilde{W}(t) = W(t) + c$$

    mit $\tilde{W}(0) = c$.
  - (W1), (W2), (W3) bestimmen die endlich-dimensionalen Verteilungen von

$$W(t_1), W(t_2), \ldots, W(t_n) \quad \forall\ n \geq 1, t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_+.$$

  - (W4) folgt nicht aus (W1) – (W3).

    Man müsste sogar zeigen, dass (W4) mit (W1) – (W3) verträglich ist.

- Eindimensionale Verteilungen:

$$W(t) \sim N(0, \sigma^2 t) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}_+,$$

da

$$W(t) - W(0) = W(t) \sim N(0, \sigma^2 t)$$

nach (W1) und (W3).

- Bivariate Verteilungen:

$$\begin{pmatrix} W(s) \\ W(t) \end{pmatrix} \sim N(0, \Sigma), \quad 0 \leq s < t$$

mit

$$\Sigma = \sigma^2 \begin{pmatrix} s & s \\ s & t \end{pmatrix}.$$

Für s, t beliebig: $Cov(W(s), W(t)) = \min(t, s)\sigma^2$.

Zugehörige Dichte:

$$f_{s,t}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{s(t-s)}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\frac{x_1^2}{s} + \frac{(x_2-x_1)^2}{t-s}\right]\right\}, \quad s < t$$

- Bedingte Dichten:

$$\begin{aligned} W(s) \mid [W(t) = b] &\sim N\left(\frac{s}{t}b, \sigma^2\frac{s}{t}(t-s)\right), s < t \\ W(t) \mid [W(s) = a] &\sim N(a, \sigma^2(t-s)) \end{aligned}$$

- Allgemeine endlichdimensionale Verteilungen: Für $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n,\ n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(W(t_1), \ldots, W(t_n))' \sim N(0, \sigma^2 \Sigma)$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} t_1 & t_1 & t_1 & \ldots & t_1 \\ t_1 & t_2 & t_2 & \ldots & t_2 \\ t_1 & t_2 & t_3 & \ldots & t_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_1 & t_2 & t_3 & \ldots & t_n \end{pmatrix}$$

Dichte:

$$\begin{aligned} f_{t_1,\ldots t_n}(x_1, \ldots, x_n) &= f(x_1) f(x_2 \mid x_1) \cdot \ldots \cdot f(x_n \mid x_{n-1}) \\ &= \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\frac{x_1^2}{t_1} + \frac{(x_2 - x_1)^2}{t_2 - t_1} + \ldots + \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{t_n - t_{n-1}}\right]\right\}}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n \sqrt{t_1(t_2 - t_1) \cdot \ldots \cdot (t_n - t_{n-1})}} \end{aligned}$$

Dies zeigt auch die Markoveigenschaft des Wiener Prozess.

- Pfadeigenschaften:
  - Stetig nach (W4).
  - In jedem endlichen Intervall von unbeschränkter Variation:

$$t_0, t_1, \ldots, t_n \text{ Gitter auf } [t_0, t_n], \text{ Schrittweite } \delta_n$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} |W(t_k) - W(t_{k-1})| \longrightarrow \infty\,, \quad \text{für} \quad n \longrightarrow \infty$$

  - Mit Wahrscheinlichkeit 1 nirgends differenzierbar. Plausibilitätserklärung:

    Für den Differenzenquotienten gilt

$$\frac{W(t+h) - W(t)}{h} \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{|\,h\,|}\right)$$

    d.h. die Varianz des Differenzenquotienten $\longrightarrow \infty$ für $h \to 0$.

Es gilt sogar

$$P\left\{a \leq \frac{W(t+h)-W(t)}{h} \leq b\right\} \xrightarrow{h \to 0} 0, \quad \text{[a,b] endl. Intervall}$$

$\Rightarrow$ Differenzenquotienten kann nicht gegen endliche Zufallsvariable konvergieren.

1.2.3 Zählprozesse und Poisson-Prozess

- Allgemeine Notation für Zählprozesse:
  - $\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$ Stochastischer Prozess von Ereigniszeitpunkten, z.B.
    - ◇ Eintreten von Schadensfällen bei KFZ–Versicherung
    - ◇ Todesfälle in klinischer Studie
    - ◇ Ankünfte von Jobs bei Computer, von Kunden bei "Servicestelle", . . .
    - ◇ Kauf eines Produkts
    - ◇ Transaktionen an der Börse
  - $\{T_n, n \in \mathbb{N}\}$ Stochastischer Prozess von Verweildauern, Zwischenankunftszeiten, etc. mit $(S_0 := 0)$

$$T_n = S_n - S_{n-1}$$

$\Rightarrow$ Zählprozess

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} I_{(0,t]}(S_n) = \text{ Anzahl der Ereignisse in } (0,t].$$

- Vereinbarung: $T_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. keine gleichzeitigen Ereignisse.
- Pfade sind rechtsstetige Treppenfunktionen mit Sprunghöhe 1

- Verhältnis zwischen Zählprozess und Ereigniszeitpunkten:

$$\begin{aligned} S_n \leq t \quad &\Leftrightarrow \quad N(t) \geq n \\ S_n \leq t < S_{n+1} \quad &\Leftrightarrow \quad N(t) = n \\ N(t) = \max_n\{S_n \leq t\} \quad &= \quad \min_n\{S_{n+1} > t\} \end{aligned}$$

- Mehr zu Zählprozessen in Kapitel 7; hier: Poisson-Prozess als einfachster Zählprozess

- Definition: Zählprozess N mit unabhängigen und stationären Zuwächsen:

  N besitzt unabhängige Zuwächse $:\Leftrightarrow \forall\, n\ \forall\, t_0 < t_1 < \ldots < t_n$

  $$N(t_1) - N(t_0), \ldots, N(t_n) - N(t_{n-1}) \quad \text{unabhängig}$$

  N besitzt stationäre Zuwächse $:\Leftrightarrow \forall\ 0 \leq t_1 < t_2,\ s > 0$

  $$N(t_2) - N(t_1) \text{ und } N(t_2 + s) - N(t_1 + s) \text{ identisch verteilt}$$

- Definition Poisson-Prozess:

  Ein Zählprozess $N = \{N(t), t \geq 0\}$ heißt Poisson-Prozess $:\Leftrightarrow$

  (1) N hat unabhängige und stationäre Zuwächse

  (2) $P\{N(t+h) - N(t) \geq 2\} = o(h)$
  $P\{N(t+h) - N(t) = 1\} = \lambda h + o(h)$

- Eigenschaft (2) lässt sich ersetzen durch
  - Sprünge der Pfade haben (mit Wkeit 1) die Höhe 1,
  - keine gleichzeitigen Ereignisse,
  - Zählprozess nach unserer Übereinkunft.

- Für einen Poisson-Prozess N gilt

$$P(N(t) = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

d.h.

$$N(t) \sim Po(\lambda t)$$

mit Intensität oder Rate $\lambda > 0$.

Bemerkung: (2) kann auch durch $N(t) \sim Po(\lambda t)$ ersetzt werden

- Der Poisson-Prozess ist ein homogener (stationärer) Markov-Prozess, d.h. für $s_0 < ... < s_n < s < t$ und $j \geq i$ gilt

$$\begin{aligned} P(N(t)=j \mid N(s)=i, N(s_n)=i_n, \ldots, N(s_1)=i_1) &= P(N(t)=j \mid N(s)=i) \\ &= P(N(t-s)=j-i) \\ &= \frac{(\lambda(t-s))^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda(t-s)} \end{aligned}$$

- Bemerkung: Jeder Prozess mit unabhängigen [und stationären] Zuwächsen ist ein [homogener] Markov-Prozess.

- N ist Poisson–Prozess mit Rate $\lambda \Leftrightarrow$ Die Zwischenzeiten T_n sind i.i.d. Ex(λ) verteilt (exponentialverteilt mit Parameter λ).

- Für die Wartezeit auf das n-te Ereignis $S_n = T_1 + \ldots + T_n$ gilt

$$\begin{aligned} S_n &\sim Ga(n, \lambda) \\ f_{S_n}(t) &= \frac{e^{-\lambda t} \lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} E(S_n) &= \frac{n}{\lambda}, \\ Var(S_n) &= \frac{n}{\lambda^2}, \\ Modus(S_n) &= \frac{n-1}{\lambda}. \end{aligned}$$

- Vorwärtsrekurrenzzeit:

$$V(t) = S_{N(t)+1} - t$$

$$P(V(t) \leq x) = F_{V(t)}(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

d.h. $V(t) \sim Ex(\lambda)$.

Bemerkung: $V(t) \sim Ex(\lambda)$ unabhängig von gewähltem t folgt aus "Gedächtnislosigkeit" der Exponentialverteilung:

$$X \sim Ex(\lambda) \Rightarrow P(X \leq t + x \mid X > t) = P(X \leq x).$$

- Rückwärtsrekurrenzzeit

$$\begin{aligned} U(t) &= t - S_{N(t)} \\ P(U(t) = t) &= e^{-\lambda t} \\ P(U(t) \le x) &= 1 - e^{-\lambda x}, \quad 0 \le x < t \end{aligned}$$

Bemerkung: $U(t) + V(t) = T_{N(t)+1} = S_{N(t)+1} - S_{N(t)}$

- Sampling Paradoxon: $N(t)$ in $S_{N(t)}$ ist zufälliger Index; $T_{(N(t)+1)} \neq T_n$, n fest.

  Für fest vorgegebenes t gilt

$$E(T_{N(t)+1}) = E(U(t)) + E(V(t)) = \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t}) + \frac{1}{\lambda} > \frac{1}{\lambda} = E(T_n)$$

Plausibilitätserklärung: Bei fest vorgegebenem t ist $T_{N(t)+1}$ die zufällige Länge der enthaltenen Zwischenzeit. Im Schnitt werden längere Intervalle dabei favorisiert.

- Überlagerung von Poisson-Prozessen

$$\left.\begin{array}{ll} L = \{L(t), t \geq 0\} & \text{PP mit Rate } \lambda \\ M = \{M(t), t \geq 0\} & \text{PP mit Rate } \mu \end{array}\right\} \text{unabhängig}$$

  Dann heißt $N = \{N(t), t \geq 0\}$ mit

$$N(t, \omega) = L(t, \omega) + M(t, \omega)$$

  Überlagerung von L und M. Es gilt: N ist Poisson-Prozess mit Rate $\lambda + \mu$.

- Zerlegung von Poisson-Prozessen:

  N Poisson-Prozess mit Rate λ. Bei Eintritt eines Ereignisses wird ein binomisches Experiment $P(X = 1) = p$, $P(X = 0) = 1 - p$, unabhängig von N, durchgeführt.

$$\begin{array}{lll} X = 1 & : & \text{Typ–1 Ereignis} \Rightarrow \text{Zählprozess } M \\ X = 0 & : & \text{Typ–0 Ereignis} \Rightarrow \text{Zählprozess } L \end{array}$$

  Es gilt: M und L sind unabhängige PP mit Raten λp und $\lambda(1 - p)$.

- Typisches Beispiel: Netzwerke, etwa Straßensystem.

- Verallgemeinerung: Räumlicher Poisson-Prozess
  - Anzahl der Ereignisse in einem Gebiet A ist Poisson-verteilt mit Erwartungswert $\lambda \cdot$ Fläche(A).
  - Anzahl der Ereignisse in zwei nicht überlappenden Gebieten A_1 und A_2 sind unabhängig.

- Erweiterung I: Inhomogener Poisson-Prozess

  Ein Zählprozess $N = \{N(t), t \geq 0\}$ heißt nichtstationärer (inhomogener) Poisson-Prozess mit Rate (Intensitätsfunktion) $\lambda(t)$, $t \geq 0$ $:\Leftrightarrow$

  (1) N hat unabhängige Zuwächse

  (2) $P(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$
  $P(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h)$

Es lässt sich zeigen:

$$P(N(t+s)-N(t)=n) = \exp\left(-\int\limits_t^{t+s}\lambda(u)du\right)\frac{\left(\int\limits_t^{t+s}\lambda(u)du\right)^n}{n!}$$

$$= \exp(-(\Lambda(t+s)-\Lambda(t))\frac{(\Lambda(t+s)-\Lambda(t))^n}{n!}$$

mit $\Lambda(t)=\int\limits_0^t\lambda(u)du$ als kumulierte Rate, d.h.

$$N(t+s)-N(t)\sim Po\left(\int\limits_t^{t+s}\lambda(s)ds\right)$$

- Erweiterung II: Bewerteter (Compound) Poisson-Prozess

  N Poisson-Prozess, $\{Y_n, n \in \mathbb{N}\}$ von N unabhängige i.i.d. Folge.

  Dann heißt $X = \{X(t), t \geq 0\}$ mit

$$X(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} Y_n$$

  bewerteter Poisson-Prozess.

- Beispiele:
  - Schadensprozesse

$N(t)$	Prozess der Schadensanzahl,
$\{Y_n, n \in \mathbb{N}\}$	zugehörige Schadenshöhen,
$X(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} Y_n$	Gesamtschaden in $[0, t]$.

– Klassisches Versicherungsmodell von Cramér–Lundberg

$R(t) = c_0 + c_1 t - X(t)$	Risikoprozess,
c_1	Prämienintensität,
$X(t)$	bewerteter Poisson-Prozess mit Intensität λ,
Y_n i.i.d. $\sim F$	Schadenhöhen.

Ziel: Bestimmung der Wahrscheinlickeiten

$$P(R(t) > 0\ \forall t) = ?$$

oder

$$P(R(t) \leq 0) \leq ?$$