Aufgabe 1

Es sei der folgende Pfad einer einfachen Irrfahrt gegeben:

$$0 \to 1 \to 0 \to 1 \to 2 \to 2 \to 1 \to 2 \to 2 \to 1 \to 0 \to -1 \to -2$$

a) Stellen Sie die Likelihood $L(p, q, r|\text{Daten})$ auf.

b) Bestimmen Sie die Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{p}_{ML}$, $\hat{q}_{ML}$ und $\hat{r}_{ML}$.

c) Wie sehen die ML-Schätzer für eine allgemeine Realisation $X_0, \dots, X_n$ aus?

Aufgabe 2

Sie besitzen $k \in \mathbb{N}$ Euro und möchten ihr Vermögen auf $M \in \mathbb{N}$ Euro erhöhen (d.h. $M > k$). Sie nehmen dafür an folgendem Münzspiel teil:

Es wird eine Münze geworfen. Wenn die Münze Bild anzeigt, gewinnen Sie einen Euro, bei Zahl verlieren Sie einen Euro.

Sie spielen solange, bis Sie entweder M Euro besitzen oder Ihr gesamtes Kapital verspielt haben. Die Wahrscheinlichkeit für Bild beträgt dabei p (mit $0 < p < 1$) und für Zahl $q = 1 - p$.

a) Welche Art von stochastischem Prozess liegt hier vor? Geben Sie alle relevanten Komponenten an.

b) Schreiben Sie in R eine Funktion, die den Spielverlauf simuliert, d.h solange Spiele durchführt, bis Sie entweder 0 oder M Euro besitzen. Visualisieren Sie für $k = 5$ und $M = 10$ Euro, sowie für $k = 200$ und $M = 500$ Euro und $p \in \{0.3, 0.5, 0.7\}$ mögliche Realisationen des Prozesses.

   Hinweis:
   Schreiben Sie zunächst eine Funktion für die einfache Irrfahrt und modifizieren Sie diese dann entsprechend.

c) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit P_k dafür, dass Sie Ihr Kapitel auf M erhöhen können, dem folgenden Ausdruck entspricht:

$$P_k = \begin{cases} \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^k}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^M} & \text{falls } p \neq q \\ \frac{k}{M} & \text{falls } p = q = \frac{1}{2} \end{cases}$$

   Hinweis:
   Benutzen Sie im ersten Schritt den Satz der totalen Wahrscheinlichkeit und Schreiben Sie P_k in Abhängigkeit vom Ausgang des ersten Münzwurfs. Leiten Sie anschließend mit einen rekursiven Ausdruck für P_k in Abhängigkeit von P_1 her. Überlegen Sie sich dann einen Weg zur Berechnung von P_1.

d) Visualisieren Sie in R die Wahrscheinlichkeit (aus Aufgabe c)) in Abhängigkeit von p mit $k = 5$ und $M = 10$ sowie $k = 50$ und $M = 100$. Was fällt Ihnen auf?