Aufgabe 1

Gegeben sei eine homogene Markov-Kette 1. Ordnung $X = \{X_t, t \in \mathbb{N}\}$ mit Zustandsraum
$S = \{A, B, C, D\}$ und der folgenden Übergangsmatrix:

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

(a) Zeichnen Sie den zugehörigen Markov-Graphen.

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, in genau drei Schritten vom Zustand C in den Zustand A zu gelangen?

(c) **Klassifizierung nach Erreichbarkeit**

   (i) Bestimmen Sie die Äquivalenzklassen von X.

   (ii) Teilen Sie diese in abgeschlossene, offene und irreduzible Klassen ein.

   (iii) Gibt es absorbierende Zustände?

(d) **Klassifizierung nach Rückkehrverhalten**

   (i) Welche Zustände von X sind rekurrent?

   (ii) Welche Zustände von X sind transient?

   (iii) Welche Zustände von X sind periodisch?

(e) Bringen Sie $\boldsymbol{P}$ in die kanonische Form.

Aufgabe 2

Gegeben sei eine homogene Markov-Kette 1. Ordnung $X = \{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ mit Zustandsraum $S = \{A, B, C\}$ und der folgenden Übergangsmatrix:

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.8 \end{pmatrix} \end{array}$$

(a) Vergewissern Sie sich, dass X ergodisch ist.

(b) Berechnen Sie die stationäre Verteilung von X und interpretieren Sie diese.

(c) Berechnen Sie die erwarteten Rückkehrzeiten für alle drei Zustände.