Aufgabe 1

Es soll ein Metropolis - Algorithmus konstruiert werden, der gegen die folgende diskrete Verteilung konvergiert:

$$\boldsymbol{\pi}(x) \;=\; (0.3, 0.1, 0.6)\ .$$

a) Berechnen Sie die Akzeptanzwahrscheinlichkeiten $\alpha(x, y)$ bei Verwendung der Vorschlagsdichte

$$Q = \begin{pmatrix} 1-2q & q & q \\ q & 1-2q & q \\ q & q & 1-2q \end{pmatrix}\ , \quad \text{mit } q \in (0, 0.5)$$

sowie die Übergangsmatrix $\boldsymbol{P}$ der sich daraus ergebenden Markov-Kette.

b) Vergewissern Sie sich, dass $\boldsymbol{P}$ tatsächlich $\boldsymbol{\pi}(x)$ als stationäre Verteilung hat.

c) Simulieren Sie die resultierende Markov-Kette in R. Welche Werte von q erscheinen Ihnen als besonders günstig?

d) Geben Sie eine nicht-triviale (d.h. nicht diagonale) Vorschlagsdichte Q an, bei der die entstehende Markov-Kette nicht irreduzibel ist.

Aufgabe 2

Ein Sportfischer fährt am Wochenende zum Angeln an einen kleinen Weiher. In diesem Weiher befinden sich am frühen Morgen genau 10 Fische. Wenn noch n Fische im Weiher schwimmen, so ist die Zeit bis zum Anbeißen des nächsten Fisches exponentialverteilt mit dem Parameter $n \cdot \mu$, wobei $\mu = 0.2$ und $n = 1, ..., 10$ gilt.

(a) Welchem Prozess folgt die Anzahl der Fische im Weiher und welchem im Fangeimer?

(b) Geben Sie für diesen Prozess die Intensitätsmatrix $\boldsymbol{\Lambda}$ und die Übergangsmatrix $\boldsymbol{Q}$ der eingebetteten Markov-Kette an.

(c) Wie viel Zeit verstreicht im Mittel, bis der Sportangler genau 5 Fische bzw. alle 10 Fische gefangen hat?