Aufgabe 1

Schreiben Sie in R eine Funktion, die die Pfade der diskreten einfachen Irrfahrt auf der Geraden für gegebene Wahrscheinlichkeiten p, q und r (mit $p+q+r=1$) sowie gegebene Länge n simuliert und visualisiert. Testen Sie Ihr Programm mit verschiedenen Kombinationen für p, q und r und visualisieren Sie die Pfade. Wie müsste das Programm verändert werden, um eine diskrete Irrfahrt mit absorbierenden Schranken zu simulieren?

Lösung Aufgabe 1

Simulation

Parameter: Länge des Pfades, Wahrscheinlichkeiten der Zuwächse

Rückgabe: `data.frame` aus 2 Spalten für Zeitpunkte und Zustände

Simulationsschritte:

1. Setze $X_0 = 0$
2. Für $t = 1, \ldots, n$:
   - Ziehe Z_t zufällig aus der Dreipunktverteilung
   - berechne $X_t = X_{t-1} + Z_t$

Absorbierende Schranken

Zusätzliche Argumente für beide Schranken und in jeder Iteration Abfrage, ob eine der Schranken erreicht.

Aufgabe 2

Modifizieren Sie Ihre Funktion aus Aufgabe 1 derart, dass anstelle der konstanten Schrittweiten und Zeitintervalle von 1 variablere Sprünge Δx sowie Zeitintervalle Δt zugelassen sind. Benutzen Sie dazu die Parametrisierung

$$\Delta x = \frac{\sigma}{\sqrt{c}} \qquad \text{und} \qquad \Delta t = \frac{1}{c} \, ,$$

wobei σ und c bekannte Parameter sind, die Sie mit Ihrer Funktion variieren können. Visualisieren Sie die Pfade insbesondere für $p = q = \frac{1}{2}$ und $c \longrightarrow \infty$. Welche Art von stochastischem Prozess ergibt sich in diesem Fall?

Lösung Aufgabe 2

Simulation

Modifikation der Funktion aus Aufgabe 1:

- $r = 0$ und damit braucht man nur noch p, da $q = 1 - p$.
- Durch Parametrisierung von

$$\Delta t = \frac{1}{c} \qquad \text{und} \qquad \Delta x = \frac{\sigma}{\sqrt{c}}$$

  sichert man, dass

$$\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} = \frac{\frac{\sigma^2}{c}}{\frac{1}{c}} = \sigma^2$$

  konstant ist.