Aufgabe 1

Schreiben Sie in R eine Funktion, welche die Pfade des Wiener Prozesses simuliert und visualisiert.

Lösung Aufgabe 1

Simulationsbausteine, basierende auf Axiom W1 (stationäre NV-verteilte Zuwächse)

- Start in 0
- Schrittweite Δt wählen, da nur diskret simuliert werden kann
- Ziehe Zuwachs aus $N\left(0, \sigma^2 \cdot \Delta t\right)$
- Summiere Zuwächse auf

Aufgabe 2

Sei $W = \big\{W(t), t \geq 0\big\}$ ein Wiener Prozess.

a) Ist W schwach stationär? Ist W streng stationär? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Betrachten Sie nun den Prozess $X = \{X(t), t \geq 0\}$ mit

$$X(t) = \begin{cases} \frac{W(t)}{\sqrt{t}} & t \geq 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

Ist X schwach stationär? Handelt es sich bei X ebenfalls um einen Wiener Prozess? Begründen Sie Ihre Antworten.

Lösung Aufgabe 2

a) Aus den Axiomen des Wiener Prozesses folgt: $W(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 t)$, also $\text{Var}(W(t)) = \sigma^2 t$.
$\Longrightarrow$ Die Varianz hängt von t ab, deswegen ist $W(t)$ nicht schwach stationär.
$\Longrightarrow$ Damit ist $W(t)$ erst recht nicht streng stationär, da schwache Stationarität Voraussetzung für die strenge Stationarität ist.

b)

$$\begin{aligned}
X(t) &= \frac{W(t)}{\sqrt{t}} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbb{E}(X(t)) = \mathbb{E}\left(\frac{W(t)}{\sqrt{t}}\right) = 0 \\
\text{Var}(X(t)) &= \text{Var}\left(\frac{W(t)}{\sqrt{t}}\right) = \frac{1}{t}\,\text{Var}(W(t)) = \frac{\sigma^2 t}{t} = \sigma^2 \\
\text{Cov}(X(t), X(t+h)) &= \text{Cov}\left(\frac{W(t)}{\sqrt{t}}\,,\ \frac{W(t+h)}{\sqrt{t+h}}\right) \qquad \text{für } h > 0 \\
&= \frac{1}{\sqrt{t}\,\sqrt{t+h}}\,\text{Cov}\left(W(t)\,,\ W(t+h)\right) \\
&= \frac{\sigma^2 t}{\sqrt{t^2 + th}}
\end{aligned}$$

Da die Kovarianz $\text{Cov}(X(t), X(t+h))$ von der Zeit t und nicht nur von der Zeitdifferenz h abhängt, ist der Prozess $X(t)$ nicht schwach stationär.
Es kann sich bei $X(t)$ nicht um einen Wiener Prozess handeln, da die Varianz von $W(t)$ von t abhängt, während die Varianz von $X(t)$ über die Zeit konstant ist.