Aufgabe 1

Gegeben sei ein homogener Poisson-Prozess $\{N(t), t \geq 0\}$ mit der Rate $\lambda > 0$. Dabei seien t und s zwei verschiedene Zeitpunkte, also $t \neq s$, und $i \in \mathbb{N}_0$ ein Zustand.

a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, mit welcher der Prozess zum Zeitpunkt t und zum Zeitpunkt s im Zustand i ist. Interpretieren Sie das Ergebnis.

b) Wie lassen sich Pfade von $N(t)$ auf dem Zeitintervall $[0, s]$ mit $s > 0$ simulieren? Beschreiben Sie das Vorgehen in eigenen Worten, als Pseudoalgorithmus oder geben Sie R-Code an.

c) Warum handelt es sich beim Poisson-Prozess um einen Markov-Prozess? Geben Sie für den Poisson-Prozess (schematisch) die Intensitätsmatrix $\boldsymbol{\Lambda}$ und die Übergangsmatrix $\boldsymbol{Q}$ der eingebetteten Markov-Kette an.

Lösung Aufgabe 1

a) Gegeben: $\{N(t), t \geq 0\}$ Poisson-Prozess mit Rate $\lambda > 0$
Sei o.B.d.A $s \leq t$

$$\begin{aligned}
P(N(t) = i, N(s) = i) &= P(N(t) = i \mid N(s) = i) \cdot P(N(s) = i) \\
&= P(T_n > t - s) \cdot P(N(s) = i) \\
&= (1 - P(T_n \leq t - s)) \cdot P(N(s) = i) \\
&= (1 - 1 + \exp(-\lambda(t - s))) \cdot \frac{(\lambda s)^i}{i!} \exp(-\lambda s) \\
&= \exp(-\lambda(t - s)) \cdot \frac{(\lambda s)^i}{i!} \exp(-\lambda s) \\
&= \frac{(\lambda s)^i}{i!} \exp(-\lambda(s + (t - s))) = \frac{(\lambda s)^i}{i!} \exp(-\lambda\, t)
\end{aligned}$$

Alternative:

$$\begin{aligned}
P(N(t) = i, N(s) = i) &= P(N(t) = i \mid N(s) = i) \cdot P(N(s) = i) \\
&= P(N(t) - N(s) = 0) \cdot P(N(s) = i) \\
&= P(N(t - s) - \underbrace{N(s - s)}_{=N(0)=0} = 0) \cdot P(N(s) = i) \\
&= P(N(t - s) = 0) \cdot P(N(s) = i) \\
&= \frac{(\lambda(t - s))^0}{0!} \exp(-\lambda(t - s)) \frac{(\lambda s)^i}{i!} \exp(-\lambda s) \\
&= \frac{(\lambda s)^i}{i!} \exp(-\lambda(s + (t - s))) = \frac{(\lambda s)^i}{i!} \exp(-\lambda\, t)
\end{aligned}$$

Interpretation:

- Falls $s = t$, dann ist $P(N(t) = i, N(s) = i) = P(N(s) = i) = \frac{(\lambda s)^i}{i!} \exp(-\lambda\, s)$.

- Die gemeinsame Wahrscheinlichkeit $P(N(t) = i, N(s) = i)$ ist am größten für $s = t$ und wird immer kleiner, je größer die Differenz $t - s$ wird, d.h. je weiter der Zeitpunkt t von s entfernt ist.

b) Als Pseudoalgorithmus (siehe Übung):

- Übergeben von Parametern: λ, $t_{\max}$
- Vorgehen:
  Simuliere $T_i \overset{\text{iid}}{\sim} Exp(\lambda)$, berechne $S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$ und brich ab, falls $S_{n+1} \geq t_{\max}$
- Rückgabe:

Zeit	Pfad
0	0
0.03	1
0.42	2
$\vdots$	$\vdots$
4.9	n
$t_{\max}$	n

Als R-Code:

```
# Festzulegende Parameter fuer die Funktion:
pp <- function(lambda, tmax){

       # Vektor mit Ereigniszeitpunkten initialisieren
       zeit <- 0

       #Laufindex definieren in Vorbereitung auf die while-Schleife
       i <- 1

       # Solange neue exponentialverteilte Verweildauern ziehen
       # und summieren, bis die Summe tmax ueberschreitet
       while(zeit[i] < tmax) {
         zeit <- c(zeit,zeit[i] + rexp(1, rate = lambda))
         i <- i+1
       }

       # Anzahl der simulierten Verweildauern bestimmen
       n <- length(zeit)

       # Den letzten Zeitpunkt umdefinieren und die zugehoerigen
       # Zustaende als Pfad des Poisson-Prozesses definieren
       zeit[n] <- tmax
       pfad <- c(0:(n-2),n-2)

       pp <- data.frame(zeit=zeit,pfad=pfad)
       return(pp)
}
```

c) Ein Poisson-Prozess $\{N(t), t \geq 0\}$ ist ein diskreter Markov-Prozess, denn:

- Der Parameterraum bzw. die Zeitachse ist stetig ($t \geq 0$).
- Der Zustandsraum $S = \mathbb{N}_0$ ist diskret und es sind nur Sprünge von $i \longrightarrow i + 1$ möglich.

- Die Verweildauern in den einzelnen Zuständen sind *iid* exponentialverteilt mit dem Parameter λ, also $T_n \overset{\text{iid}}{\sim} Exp(\lambda)$. (Beim allgemeinen Markov-Prozess sind sie unabhängig und hängen vom aktuellen Zustand ab, also $T_n \mid Y_{n-1} = i \sim Exp(\lambda_i)$.)
  (Alternativen zu diesem Punkt:
  (1) Der Poisson-Prozess hat unabhängige Zuwächse. Oder:
  (2) Beim Poisson-Prozess gilt die Markov-Eigenschaft.)

Alternative Argumentation: Ein Poisson-Prozess ist ein Spezialfall eines Geburtsprozesses (mit Begründung...) und damit auch ein Spezialfall eines Markov-Prozesses.

Struktur der Intensitätsmatrix:

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ \vdots \\ n \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} 0 & 1 & 2 & \cdots & \cdots & n & n+1 & \cdots & \end{array} \\ \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & & & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 & & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \end{array} .$$

Struktur der Übergangsmatrix der eingebetteten Markov-Kette:

$$\boldsymbol{Q} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ \vdots \\ n \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} 0 & 1 & 2 & \cdots & \cdots & n & n+1 & \cdots & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 & & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \end{array} .$$