

Hinweis: Nach einer Wiederholung des Konzepts von Bootstrap soll diese Aufgabe im Tutorium selbstständig gelöst werden. Die Lösung wird am Ende vorgestellt.

Aufgabe 1

Sei X eine Zufallsvariable mit unbekannter Verteilungsfunktion F . Nach fünf unabhängigen Ziehungen aus F liege die Stichprobe

$$\mathbf{x} = (2.49, 1.35, 2.48, 1.54, 3.84)^\top$$

vor. Von Interesse sei der Median θ bzgl. der Verteilung F , der durch den Stichprobenmedian $\hat{\theta}(\mathbf{x}) = 2.48$ geschätzt werden kann. Da der Stichprobenumfang aber gering ist, soll außerdem der Standardfehler $\text{se}(\hat{\theta}(\mathbf{X}))$ dieser Schätzung ermittelt werden. Hierzu wurden folgende Bootstrap-Stichproben $\mathbf{x}^{*1}, \dots, \mathbf{x}^{*10}$ generiert:

b	Bootstrap-Stichprobe \mathbf{x}^{*b}	Median $\hat{\theta}^*(b)$	$(\hat{\theta}^*(b))^2$
1	(2.48, 1.35, 3.84, 2.49, 3.84)	2.49	6.2001
2	(2.48, 1.35, 2.49, 2.49, 1.54)		
3	(1.54, 1.54, 1.54, 3.84, 3.84)		
4	(2.48, 3.84, 2.48, 1.35, 1.54)		
5	(2.48, 2.49, 2.49, 3.84, 3.84)		
6	(1.54, 1.54, 1.35, 2.49, 1.54)		
7	(2.48, 2.49, 2.49, 1.54, 1.35)		
8	(1.35, 2.49, 2.49, 2.49, 1.54)		
9	(2.48, 3.84, 2.48, 3.84, 2.49)		
10	(2.48, 3.84, 1.35, 2.49, 3.84)		
	Summe:		

- (a) Vervollständigen Sie die obige Tabelle.
- (b) Berechnen Sie mit Hilfe dieser Stichproben eine Bootstrap-Schätzung $\hat{\text{se}}(\hat{\theta}(\mathbf{X}))$ für den Standardfehler des Schätzers für den Median von X .
Hinweis: Sie können hierzu auch den Varianzverschiebungssatz benutzen.
- (c) Wurden die oben angegebenen Bootstrap-Stichproben durch parametrischen oder nichtparametrischen Bootstrap erzeugt? Begründen Sie Ihre Vermutung.