Aufgabe 1

(a) Die Hendersons Schätzgleichungen sind:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}'\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} + \boldsymbol{X}'\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{Z}\hat{\boldsymbol{b}} &= \boldsymbol{X}'\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} + (\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{G}^{-1})\hat{\boldsymbol{b}} &= \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{y} \end{aligned} \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass (1) äquivalent zu folgender Darstellung ist:

$$(\boldsymbol{C}'\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{C} + \boldsymbol{A})\begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{\beta}}\\ \hat{\boldsymbol{b}}\end{pmatrix} = \boldsymbol{C}'\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{y}, \qquad \text{mit } \boldsymbol{C} = (\boldsymbol{X}|\boldsymbol{Z}) \text{ und } \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{G}^{-1}\end{pmatrix}. \tag{2}$$

Geben Sie basierend auf (2) die Lösung der Schätzgleichungen an.

(b) Leiten Sie darauf aufbauend die Kovarianzmatrix von $\begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{\beta}}\\ \hat{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{b}\end{pmatrix}$ her.
Hinweis: Setzen Sie für $\boldsymbol{y}$ die Modellgleichung ein.

(c) Leiten Sie $\mathrm{Cov}\left(\begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{\beta}}\\ \hat{\boldsymbol{b}}\end{pmatrix} \middle| \boldsymbol{b}\right)$ her.

Aufgabe 2

Betrachten Sie erneut den Datensatz zum Blutdruck. Als Signifikanzniveau wird in dieser Aufgabe $\alpha = 5\%$ verwendet.

(a) Fitten Sie folgendes Modell in R, wobei $\text{gender}_i = 0$, falls Person i weiblich und $\text{gender}_i = 1$ falls Person i männlich ist.

$$\begin{aligned} \text{SBD}_{ij} = \quad & \beta_1 \cdot I(\text{gender}_i = 0) + \beta_2 \cdot I(\text{gender}_i = 1) + \beta_3 \cdot \text{dosis}_{ij} \cdot I(\text{gender}_i = 0) + \\ & \beta_4 \cdot \text{dosis}_{ij} \cdot I(\text{gender}_i = 1) + b_i + \varepsilon_{ij}, \\ & b_i \overset{\text{iid}}{\sim} N(0, \tau^2),\ \varepsilon_{ij} \overset{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2),\ \ b_i,\ \varepsilon_{ij} \text{ unabhängig} \quad \forall\, i, j \end{aligned}$$

(b) Testen Sie die Hypothesen $H_0 : \beta_3 = \beta_4 = 0$ und $H_0 : \beta_3 = \beta_4$. Was bedeuten diese Hypothesen inhaltlich?

(c) Testen Sie ob die zufälligen Intercepts im Modell enthalten sein sollen. Formulieren Sie dazu die Nullhypothese und führen Sie den Test approximativ und exakt (mit der Funktion `exactRLRT()` aus dem R-Paket `RLRsim`) durch.

(d) Fitten Sie ein Modell, das zusätzlich für jede Person eine zufällige Steigung enthält, wobei zufälliger Intercept und zufällige Steigung korreliert sein können. Führen Sie einen approximativen Test durch, ob die zufällige Steigung im Modell enthalten sein soll.

(e) Berechnen Sie das konditionale AIC (cAIC) für das Modell aus (a) und (d). Welches Modell wird laut cAIC bevorzugt?
Hinweis: Funktion `cAIC()` aus dem R-Paket `cAIC4`.

(f) *Zusatzaufgabe*: Führen Sie den Test für die zufällige Steigung mit der Funktion `exactRLRT()` durch. Beachten Sie, dass Random Intercepts und Slopes unabhängig sein müssen, damit `exactRLRT()` angewendet werden kann.