Aufgabe 1

(a) Beweisen Sie, dass für die gemeinsame Posteriori der festen und zufälligen Effekte $p(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{b}|\boldsymbol{y}) \propto p(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{b})p(\boldsymbol{\beta})p(\boldsymbol{b})$ unter der Annahme von Normalverteilungen

$$\left[\begin{array}{c}\boldsymbol{\beta}\\ \boldsymbol{b}\end{array}\right]\Bigg|\, \boldsymbol{y} \sim N(\boldsymbol{\mu}_{\beta,b}, \boldsymbol{\Sigma}_{\beta,b})$$

gilt. Definieren Sie hierfür $\boldsymbol{\mu}_{\beta,b} = \boldsymbol{\Sigma}_{\beta,b}\left(\tilde{\boldsymbol{m}} + \boldsymbol{C}'\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{y}\right)$, $\boldsymbol{\Sigma}_{\beta,b} = \left(\boldsymbol{C}'\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{C} + \boldsymbol{A}\right)^{-1}$, $\boldsymbol{C} = [\boldsymbol{X}|\boldsymbol{Z}]$,

$$\boldsymbol{A} = \left[\begin{array}{cc}\boldsymbol{M}^{-1} & 0\\ 0 & \boldsymbol{G}^{-1}\end{array}\right] \quad \text{und} \quad \tilde{\boldsymbol{m}} = \left[\begin{array}{c}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{m}\\ \boldsymbol{0}\end{array}\right].$$

(b) Leiten Sie die vollständig bedingte Dichte der festen Effekte $p(\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{b}, \boldsymbol{\vartheta}, \boldsymbol{y}) \propto p(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{\vartheta})p(\boldsymbol{\beta})$ her.

Aufgabe 2

Betrachten Sie folgendes Modell für den Datensatz mit den 100m-Läufen (vgl. Blatt 2):

$$\boldsymbol{y}_i = \beta_0 + \beta_1 \text{sex}_i + b_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i, \quad i = 1, \ldots, 20, \quad \boldsymbol{y}_i = (y_{i1}, \ldots, y_{i3})'$$

$$b_i \overset{\text{iid}}{\sim} N(0, \tau^2), \;\; \boldsymbol{\varepsilon}_i \overset{\text{iid}}{\sim} N(\boldsymbol{0}, \sigma^2\boldsymbol{I}), \quad b_i, \;\boldsymbol{\varepsilon}_i \text{ unabhängig}$$

(a) Fitten Sie das Modell mit REML-Schätzung.

(b) Schätzen Sie das Modell bayesianisch.
Hinweis: Verwenden Sie die Funktion `MCMCglmm()` aus dem R-Paket `MCMCglmm`.

(c) Vergleichen Sie die Schätzer für die festen Effekte zwischen dem mit REML und mit MCMC geschätzten Modell. Betrachten Sie im bayesianischen Modell Posteriori-Modus, -Erwartungswert und -Median. Vergleichen Sie die Schätzungen auch mit den wahren Werten.
Hinweis: Die Ziehungen der Posteriori-Dichte sind im Listenelement `Sol` des Modells gespeichert.

(d) Vergleichen Sie die Schätzungen sowie wahren Werte für die Varianzkomponenten τ^2 und σ^2.
Hinweis: `mod$VCV` enthält die posteriori der Varianzkomponenten.

(e) Vergleichen Sie die Prognosen für die zufälligen Effekte aus den beiden Modellen.

(f) Berechnen Sie die HPD-Intervalle für die festen und zufälligen Effekte.
Hinweis: Funktion `HPDinterval()`.

(g) Lassen Sie sich diagnostische Graphiken zu den MCMC-Ketten ausgeben.
Hinweis: `plot()`-Funktion auf `mod$Sol` und `mod$VCV` anwenden.