# Grundlagen: Lineare Algebra

**Aufgabe 1:**
Sei $\boldsymbol{X}$ eine $(n \times p)$ Datenmatrix, bestehend aus je $n$ Beobachtungen von $p$ Variablen. Wie kann man daraus den Mittelwertvektor $\bar{\boldsymbol{x}}$ matrixalgebraisch bestimmen?

**Aufgabe 2:**
Einige multivariate Verfahren benötigen zentrierte Daten. Das bedeutet, dass die Daten so transformiert werden müssen, dass das arithmetische Mittel jeder transformierten Variablen gleich null ist. In der univariaten Statistik erreicht man das, indem man von jeder Beobachtung einer Variablen das empirische arithmetische Mittel der Variablen subtrahiert. Das multivariate Pendant, das diese Transformation für $p$ Variablen gleichzeitig vornimmt ist die sogenannte Zentrierungsmatrix

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{I}_n - \frac{1}{n}\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n^T \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{(n\times n)}, \mathbf{1}_n = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}_{(n\times 1)}$$

Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{H}$ symmetrisch und idempotent ist.

**Aufgabe 3:**
Gegeben sei die Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Führen Sie für die Matrix $\boldsymbol{A}$ eine Spektralzerlegung durch.

**Aufgabe 4:**
Gegeben seien die folgenden Matrizen

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 10 & 17 & 11 \\ 4 & 17 & 33 & 29 \\ 4 & 11 & 29 & 39 \end{pmatrix},$$

wobei die Matrix $\boldsymbol{D}$ positiv definit ist.

a) Bestimmen Sie die Definitheit der Matrizen $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{C}$.

b) [1] Bestimmen Sie die Choleskyzerlegung $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^T$.

[1] Aufgabe wird in der Übung nicht vorgerechnet, aber eine Musterlösung bereit gestellt.