Kapitel 2

Grundbegriffe der allgemeinen Theorie stochastischer Prozesse

Inhalt

- Definitionen von SP
- Verteilung eines SP: SP als W-Maß auf Funktionenraum
- Existenzsatz von Kolmogorov
- Pfadeigenschaften

Hier nur „Skizze“, Details insbesondere Billingsley, Bauer.

2.1 Definitionen stochastischer Prozesse

2.1.1 Klassische Definition: SP als Familie von Zufallsvariablen

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ W-Raum
T Indexmenge (i.a. unendlich, z.B. $\mathbb{N}_0, \mathbb{R}_+, \ldots$)
$\{X_t,\, t \in T\}$ Familie von ZV

$$X_t : (\Omega, \mathcal{F}, P) \longrightarrow (S, \mathcal{S})$$

mit Wertebereich S, σ-Algebra $\mathcal{S}$.

- S abzählbar, $\mathcal{S} = \mathcal{P}(S)$ „diskrete ZV“
- $S = \mathbb{R}$ oder Intervall $I \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{S} = \mathcal{B}$ oder $\mathcal{B} \cap I$ „reellwertige ZV“

- $S = \mathbb{R}^p$ oder $I \subset \mathbb{R}^p$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}^p$ oder $\mathcal{B}^p \cap I$ „vektorielle ZV“

Definition 2.1 Stochastischer Prozess

Ein stochastischer Prozess (SP) ist das Quadrupel $X = (\Omega, \mathcal{F}, P; X_t,\ t \in T)$, T heißt Parameterraum, S Zustandsraum.

Bemerkung:

(a) Meist lässt man W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ weg. Also: SP $X = \{X_t, t \in T\}$ Familie von (i.a. abhängigen) ZV X_t.

(b)
- Für $T = \mathbb{N}_0$ oder $\mathbb{R}_+$ wird t meist als diskrete oder stetige Zeit interpretiert.
- Ist $T \subset \mathbb{Z}^2$ (Gitter) oder $T \subset \mathbb{R}^2$, heißt ein SP auch Zufallsfeld (random field) $\Rightarrow$ „räumliche Statistik“.
- $T \subset \mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z}^2 \Rightarrow$ zeitlich-räumliche Statistik.

Klassifizierung von SP nach Zustands- und Parameterraum

Definition 2.2 Endlich-dimensionale Verteilungen und Verteilungsfamilien

Sei X SP und sei $\{t_1, \ldots, t_n, n \in \mathbb{N}\} \subset T$ beliebig.
Dann heißen

$$P_{t_1,\ldots,t_n}(B_1 \times \ldots \times B_n) = P(X_{t_1} \in B_1, \ldots, X_{t_n} \in B_n)$$

endlich-dimensionale Verteilungen des SP X.
Für reelle ZV heißen

$$F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n) = P(X_{t_1} \leq x_1, \ldots, X_{t_n} \leq x_n)$$

endlich-dimensionale Verteilungsfunktionen des SP X.
Die Menge *aller* endlich-dimensionalen Verteilungs(funktionen) heißt die *Familie der endlich-dimensionalen Verteilungs(funktionen)*

Folgende *Verträglichkeitsbedingungen („Konsistenzbedingungen“)* gelten für alle
$n \in \mathbb{N},\ t_1, \ldots, t_n \in T$:

(a) $F_{t_{k_1},\ldots,t_{k_n}}(x_{k_1}, \ldots, x_{k_n}) = F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n)$ für jede Permutation $k_1, \ldots, k_n$ von $1, \ldots, n$

(b) $F_{t_1,\ldots,t_k}(x_1, \ldots, x_k) = F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_k, \infty, \ldots, \infty)$ $\forall\ 1 \leq k < n$ und $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$

Verträglichkeitsbedingungen gelten analog für Verteilungen ($F \to P,\ x_1, \ldots, x_k \to B_1, \ldots, B_k$).

Definition 2.3 Konsistente Verteilungsfamilie

Eine endlich-dimensionale Verteilungsfamilie heißt konsistent $:\Leftrightarrow$ (a), (b) gelten.

Definition 2.4 Pfad, Trajektorie, Realisierung

Für jedes (feste) $\omega \in \Omega$ heißt die Funktion

$$X(\omega):\ T \to S,\ t \mapsto X_t(\omega),$$

Pfad, Trajektorie oder *Realisierung* des SP X.
Also: ω fest, t läuft; $X(\omega)$ übliche (reelle) Folge (T diskret) bzw. Funktion (T stetig).

2.1.2 Stochastischer Prozess als Produktabbildung

SP lässt sich auch auffassen als Funktion der *beiden* Variablen t und ω

$$\begin{aligned} X_{\cdot}(.) :\ T \times \Omega &\to S \qquad \text{„Produktabbildung“} \\ (t,\omega) &\mapsto X_t(\omega) \end{aligned}$$

Hält man in der Produktabbildung t *fest*, erhält man die ZV

$$\begin{aligned} X_t :\ \Omega &\to S \qquad t \text{ fest} \\ \omega &\mapsto X_t(\omega) \quad \omega \text{ läuft} \end{aligned}$$

zurück.

Aber: Produktabbildung $X_{\cdot}(.)$ *i.a.* nicht messbar. Muss zusätzlich gefordert werden. Dann heißt der SP X *messbar*. Die meisten praktisch vorkommenden Prozesse sind (als Produktabbildung) messbar, insbesondere alle die wir besprechen.
Alle SP mit diskretem T sind messbar.

2.1.3 Stochastischer Prozess als Abbildung in Funktionenraum

Ordnet man jedem $\omega \in \Omega$ „seinen" Pfad $X(\omega) \in S^T$ (S^T = Raum aller Funktionen $T \to S$) zu, kann man einen stochastischen Prozess auch auffassen als Abbildung in den Funktionenraum

$$\begin{aligned} X:\ (\Omega, \mathcal{F}, P) &\to S^T \\ \omega &\mapsto X(\omega) = \{X_t(\omega),\ t \in T\} \end{aligned}$$

Vergleich mit mehrdimensionalen ZV

Stochastischer Prozess	p-dim ZV, $p = 1$: reelle ZV
$T = \mathbb{R}_+, \mathbb{N}_0, \ldots$	$T = \{1, 2, \ldots, p\}$
$S \subset \mathbb{R}$	$S = \mathbb{R}, \subset \mathbb{R}$
$X(\omega)$ Funktion bzw. Folge = Punkt im Funktionraum S^T	$X(\omega)$ Punkt im $\mathbb{R}^p$, $X(\omega) \in \mathbb{R}^p$

Also: Stochastischer Prozess X ist „ZV" mit S^T als Wertebereich.
Problem: Lässt sich auf Funktionenraum eine σ-Algebra $\mathcal{A}$ definieren, so dass
$X:\ (\Omega, \mathcal{F}) \to (S^T, \mathcal{A})$ messbar ist?
Antwort: Ja, wobei es oft zweckmäßig ist, den Funktionenraum einzuschränken.

Beispiel: Wiener Prozess; hat stetige Pfade

$$W:\ (\Omega, \mathcal{F}, P) \to (C(T), \mathcal{B}_C)$$

$C(T)$ = Raum aller stetigen Funktionen, $\mathcal{B}_C$ = Borel-σ-Algebra

Dann lässt sich P auf $(\Omega, \mathcal{F})$ als Bild-Wahrscheinlichkeits-Maß P_X auf $(S^T, \mathcal{A})$ verpflanzen:

$$W:\ (\Omega, \mathcal{F}, P) \to (S^T, \mathcal{A}, P_X).$$

$\Rightarrow$ Auffassung des stochastischen Prozesses X als W-Maß P_X auf Funktionenraum.
Details: Billingsley, Gänssler/Stute, 7.3

2.2 Existenzsatz von Kolmogorov

In 2.1.1 wurde zur Definition eines stochastischen Prozesses X als Familie von ZV $\{X_t, t \in T\}$, $X_t:\ (\Omega, \mathcal{F}, P) \to (S, \mathcal{S})$ die *Existenz eines gemeinsamen W-Raumes* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *vorausgesetzt.*
Aus der Definition können dann insbesondere die endlich-dimensionalen Verteilungen abgeleitet werden.
Bei den Beispielen (Irrfahrt, Poisson-Prozess, Wiener-Prozess,...) wurde aber $(\Omega, \mathcal{F}, P) \to (S, \mathcal{S})$ nicht explizit angegeben.

Diskrete Irrfahrt:

$X_n = Z_1 + \ldots + Z_n,\ n \in \mathbb{N}$

Ereignis $\omega = (z_1, \ldots, z_n, \ldots)$ mit $z_n \in \{-1, 0, 1\}$

$x_n(\omega) = z_1 + \ldots + z_n$

$\Omega = (-1, 0, 1)^{\mathbb{N}}$ Folgenraum, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

$P = P_1 \times \ldots \times P_n \times \ldots$ Produkt-Maß

$$\text{mit } P_n := \begin{cases} p & \text{für} \quad z_n = 1 \\ q & \text{für} \quad z_n = -1 \\ r & \text{für} \quad z_n = 0 \end{cases}$$

Poisson-Prozess:

$\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots),\ \omega_n \in \mathbb{R}_+$

$\omega_n =$ Ergebnis von $T_n \sim Ex(\lambda)$

Ω Menge aller solcher Folgen

$\mathcal{F} = \mathcal{B}_+ \times \mathcal{B}_+ \times \ldots \times \mathcal{B}_+ \times \ldots$ (Produkt-σ-Algebra)

$P = P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_n \times \ldots$ Produkt-Maß zu Exp.-Verteilungen $P_1, \ldots P_n$

In beiden Beispielen lassen sich zu jedem ω die Pfade $X(\omega),\ N(\omega)$ der ZVen X_n bzw. $N(t)$ als *messbare*

Abbildungen definieren.

In den meisten Fällen ist jedoch eine solche explizite Angabe von $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ nicht möglich, z.B.: Aktienkurse, Folge von Markenwahlen, DNA-Strang.
Der Existenzsatz von Kolmogorov zeigt, dass es reicht, wenn man endlich-dimensionale Verteilungen in *konsistenter* Weise vorgibt.

Satz 2.1 Existenzsatz von Kolmogorov

Sei $\{F_{t_1,\dots,t_n}\}$ (bzw. $\{P_{t_1,\dots,t_n}\}$) ein konsistentes System von endlich-dimensionalen Verteilungsfunktionen (bzw. Verteilungen).
Dann existiert ein W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und ein stochastischer Prozess

$$X = \{\Omega, \mathcal{F}, P, (X_t,\ t \in T)\}$$

mit $F_{t_1,\dots,t_n}$ als System von endlich-dimensionalen Verteilungsfunktionen, d.h.

$$F_{t_1,\dots,t_n}(x_1, \dots, x_n) = P(X_{t_1} \le x_1, \dots, X_{t_n} \le x_n)$$

Bemerkung:

(a) Der stochastische Prozess X ist durch den Existenzsatz *nicht eindeutig* bestimmt. Es lässt sich immer ein Prozess $\tilde{X}$ konstruieren, der zwar andere Pfade besitzt als X, aber die gleichen endlich-dimensionalen Verteilungsfunktionen! (Vgl. auch Abschnitt 2.3).
Beispiel: X mit stetigen Pfaden.

X und $\tilde{X}$ haben verschiedene Pfade, aber die gleichen endlich-dimensionalen Verteilungsfunktionen!

(b) Spezialfall: Mehrdimensionale ZV, $T = \{1, \dots, p\}$.
Existenzsatz sichert zu vorgegebener gemeinsamer Verteilungsfunktion $F(x_1, \dots, x_p)$ die Existenz eines W-Raumes $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ mit

$$F(x_1, \dots, x_p) = P(X_1 \le x_1, \dots, X_p \le x_p).$$

Dabei kann man sogar $(\Omega, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}^p, \mathcal{B}^p)$ wählen, d.h. die Realisierungen $x_1, \ldots, x_p$ werden mit ω identifiziert, $\omega \equiv (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$.
Analog bei stochastischen Prozessen:

$$\begin{aligned} \omega &\equiv \text{Pfad} \in S^T, \\ \Omega &= \text{Menge aller Pfade.} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Man braucht sich keinen zugrundeliegenden W-Raum wie bei Irrfahrt und Poisson-Prozess konstruieren.

(c) Beispiel: Wiener Prozess
Vorgabe von (W1), (W2), d.h. unabhängige und stationäre Zuwächse und W(3), d.h. $W(0) = 0$
$\Rightarrow$ endlich-dimensionale Verteilungsfunktionen wie in Abschnitt 1.2.2
$\Rightarrow$ Existenzsatz garantiert stochastischen Prozess $\tilde{W}$, aber nicht notwendig stetige Pfade.
Es lässt sich aber eine „Version“ W mit *stetigen Pfaden* konstruieren, vgl. Billingsley, Sect. 3.6.

(d) In den weiteren Kapiteln (analog wie bei Irrfahrt, Poisson-Prozess, Wiener Prozess):

Vorgabe von „Konstruktionsvorschriften“ bzw. „Axiomen“
$\Rightarrow$ endlich-dimensionale Verteilungsfunktionen
$\Rightarrow$ stochastischer Prozess inklusive W-Raum

2.3 Äquivalenz-und Stetigkeitsbegriffe

2.3.1 Äquivalente stochastische Prozesse

$X = \{X_t,\ t \in T\}$ und $Y = \{Y_t,\ t \in T\}$ seien zwei stochastische Prozesse auf gleichem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit gleichem $(S, \mathcal{S})$.

Definition 2.5 Verteilungsäquivalenz, schwache Äquivalenz

X und Y *verteilungsäquivalent (schwach äquivalent)* $:\Leftrightarrow$
die endlich-dimensionalen Verteilungen von X und Y sind gleich $\Leftrightarrow$
$\forall\ \{t_1, \ldots, t_n\} \subset T$, $\{B_1, \ldots, B_n\} \subset \mathcal{S}$, $n \in \mathbb{N}$

$$P(X_{t_1} \in B_1, \ldots, X_{t_n} \in B_n) = P(Y_{t_1} \in B_1, \ldots, Y_{t_n} \in B_n).$$

Definition 2.6 Äquivalenz

X und Y heißen *äquivalent* $:\Leftrightarrow$

$$P(X_t = Y_t) = 1 \quad \forall\ t \in T$$

Bemerkung: Man sagt: Y ist „Version“ von X.

Definition 2.7 Ununterscheidbar

X und Y heißen *ununterscheidbar* $:\Leftrightarrow$
X und Y haben mit Wahrscheinlichkeit 1 gleiche Pfade $\Leftrightarrow$

$$P\{X_t = Y_t \quad \forall\, t \in T\} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad P(\{\omega : X(\omega) = Y(\omega)\}) = 1$$

Es gilt:
X, Y ununterscheidbar $\Rightarrow$ äquivalent $\Rightarrow$ verteilungsäquivalent
Falls T abzählbar: X, Y ununterscheidbar $\Leftrightarrow$ äquivalent

Beweis:

Ununterscheidbar $\Rightarrow$ Äquivalent: klar
Äquivalent $\Rightarrow$ Verteilungsäquivalent:

$$\begin{aligned} P(X_{t_1} \in B_1, \ldots, X_{t_n} \in B_n) &= P(X_{t_1} \in B_1, \ldots, X_{t_n} \in B_n, X_{t_1} = Y_{t_1}, \ldots, X_{t_n} = Y_{t_n}) \\ &= P(Y_{t_1} \in B_1, \ldots, Y_{t_n} \in B_n, X_{t_1} = Y_{t_1}, \ldots, X_{t_n} = Y_{t_n}) \\ &= P(Y_{t_1} \in B_1, \ldots, Y_{t_n} \in B_n) \end{aligned}$$

T abzählbar: Äquivalent $\Rightarrow$ Ununterscheidbar

$$\begin{aligned} P(X_t = Y_t) = 1 \quad \forall\, t \in \mathbb{N} \qquad &\Leftrightarrow \qquad P(X_t \neq Y_t) = 0 \quad \forall\, t \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow \qquad \sum_{t=1}^{\infty} P(X_t \neq Y_t) = 0 \\ P\left(\bigcup_{t=1}^{\infty} \{X_t \neq Y_t\}\right) \qquad &\leq \qquad \sum_{t=1}^{\infty} P(X_t \neq Y_t) = 0 \\ \Rightarrow P\left(\overline{\bigcup_{t=1}^{\infty} \{X_t \neq Y_t\}}\right) \qquad &\overset{\text{(de Morgan)}}{=} \qquad P\left(\bigcap_{t=1}^{\infty} \{X_t = Y_t\}\right) = 1 \end{aligned}$$

□

Gegenbeispiel für nicht abzählbares T:

$$X: \; X_t(\omega) = 0 \quad \forall\, t \in T, \; \omega \in \Omega, \; \text{d.h. alle Pfade} \; \equiv 0$$
$$Y: \; Y_t(\omega) = \begin{cases} 1 & , \quad t = \tau(\omega) \\ 0 & , \quad \textit{sonst} \end{cases}$$

Dabei ist $\tau > 0$ stetige ZV, z.B. $\tau \sim \mathrm{Ex}(\lambda)$

X und Y verteilungsäquivalent.
Da $X_t(\omega) = 0$ für alle $(t, \omega) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} P(\omega:\ Y_t(\omega) = X_t(\omega)) &= P(\omega:\ Y_t(\omega) = 0) \\ &= P(\omega:\ \tau(\omega) \neq t) = 1 \quad \forall\, t \in T \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ X und Y äquivalent, aber unterscheidbar.

2.3.2 Stetigkeitsbegriffe

$T \in \mathbb{R}_+, \quad S \subset \mathbb{R}, \quad \mathcal{S} = \mathcal{B} \cap S$

Definition 2.8 Pfadstetig

X heißt (fast sicher) pfadstetig :$\Leftrightarrow$

$$P(\omega : \lim_{s\to t} X(s,\omega) = X(t,\omega) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}_+) = 1$$
$$(= P(\lim_{s\to t} X(s) = X(t) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}_+) = 1)$$

Analog: fast sicher rechtsstetig, fast sicher cadlag (rechtsstetig mit Grenzwerten von links)

Definition 2.9 Stetig

X heißt (fast sicher) stetig :$\Leftrightarrow$

$$P(\omega : \lim_{s\to t} X(s,\omega) = X(t,\omega)) = 1 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}_+$$

Definition 2.10 Stochastisch Stetig

X heißt stochastisch stetig $:\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} & \lim_{s\to t} P(\omega :\mid X(s,\omega) - X(t,\omega) \mid > \epsilon) = 0 \quad \forall\, \epsilon > 0, t \in \mathbb{R}_+ \\ \Leftrightarrow \quad & \text{p--}\lim_{s\to t} X(s) = X(t) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

„$X(s)$ konvergiert nach Wahrscheinlichkeit gegen $X(t)$, wenn $s \to t$, $\forall\, t \in \mathbb{R}_+$“.

Beispiel: Poisson-Prozess

(a) N nicht pfadstetig

(b) N fast sicher stetig

(c) N stochastisch stetig

Beweis:

(c) N stochastisch stetig:

$$P(\mid N(t) - N(s) \mid > \epsilon) \leq P(\mid N(t) - N(s) \mid \geq 1) = 1 - e^{-\lambda|t-s|}$$
$$\lim_{s \to t} P(\mid N(t) - N(s) \mid > \epsilon) \leq \lim_{s \to t}(1 - e^{-\lambda|t-s|}) = 0$$

(b) N fast sicher stetig:

$$\{\omega : \ N(t, \omega) \text{ stetig in t } \geq 0\} = \{\omega : \ S_n(\omega) \neq t, \forall \ n \in \mathbb{N}\}$$

Da S_n Gamma-verteilte ZV:

$$\begin{aligned}
& P\{\omega : \ S_n(\omega) = t\} = 0 \quad \forall \ n \in \mathbb{N} \\
& \Rightarrow P\left(\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega : \ S_n(\omega) \neq t\}}\right) \;=\; P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega : \ S_n(\omega) = t\}\right) \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\; \leq \; \sum_{n=1}^{\infty} P\{\omega : \ S_n(\omega) = t\} = 0 \\
& \Rightarrow P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega : \ S_n(\omega) \neq t\}\right) = 1
\end{aligned}$$

□

Satz 2.2

X, Y äquivalent und X, Y fast sicher pfad-rechtsstetig $\Rightarrow$ X, Y ununterscheidbar.

Beweis: *z.B. Todorovic, prop. 1.3.1, S. 7*

2.4 Stationäre und nichtstationäre stochastische Prozesse

Stationäre stochastische Prozesse sind stochastische Prozesse bei denen sich die endlich-dimensionale Verteilungsfunktion oder andere Charakteristika bei einer Zeitverschiebung (näherungsweise) nicht ändern.

Beispiel:

- „Rauschen“ in elektronischen Systemen
- Abweichungen in Regelsystemen
- physiologische Daten (?), z.B. EKG
- Zeitreihen nach Trend-/Saisonbereinigung
- Renditen in effizienten Märkten (?)

FKO S. 209, Kap. 7/8

Definition 2.11 Strenge Stationarität

Ein stochastischer Prozess X heißt streng stationär :⇔

$$\forall\ n, t_1, \ldots, t_n, h \qquad F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n) = F_{t_1+h,\ldots,t_n+h}(x_1, \ldots, x_n)$$

d.h. die endlich-dimensionalen Verteilungsfunktionen sind invariant gegenüber einer Zeitverschiebung h.

Folgerungen: $F_{t_1}(x_1) = F_{t_1+h}(x_1)$, d.h. die eindimensionalen Verteilungen sind zeitinvariant.

- $\mathrm{E}(X_t) = \mu = constant, \quad \mathrm{Var}(X_t) = \sigma^2 = constant.$

-

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X_s, X_t) &= \int (x_1-\mu)(x_2-\mu)dF_{s,t}(x_1,x_2) \\ &= \int (x_1-\mu)(x_2-\mu)dF_{0,t-s}(x_1,x_2) \\ &= \mathrm{Cov}(X_0, X_{t-s}) \\ &=: \gamma(t-s) \end{aligned}$$

d.h. die Kovarianz zwischen X_s, X_t hängt nur von Zeitdifferenz $t-s$, nicht von den Werten t, s auf der Zeitachse selbst ab!

Definition 2.12 Autokovarianzfunktion

$\gamma(h) = \mathrm{Cov}(X_{t+h}, X_t) = \mathrm{Cov}(X_h, X_0)$ heißt *(Auto-)Kovarianzfunktion.*

Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \gamma(h) &= \gamma(-h) \\ \mid \gamma(h) \mid &\leq \gamma(0) = \sigma^2 = Var(X_t) \end{aligned}$$

Definition 2.13 Schwache Stationärität

Ein stochastischer Prozess X heißt *schwach stationär* $:\Leftrightarrow$

$$\mathrm{E}(X_t) = \mu, \qquad \mathrm{Cov}(X_t, X_s) = \gamma(t-s)$$

d.h. die Autokovarianz hängt nur von Zeitdifferenz ab.

Offensichtlich gilt:

$$\text{Strenge Stationärität} \Rightarrow \text{Schwache Stationärität}$$

Die Umkehrung gilt für Gauß-Prozesse, d.h. Prozesse mit multivariat normalverteilten endlich-dimensionalen Verteilungsfunktionen, da die 1. und 2. Momente die endlich-dimensionalen Verteilungsfunktionen eindeutig bestimmen. Also:

X Gauß-Prozess $\Rightarrow$ Schwache Stationarität und starke Stationarität sind äquivalent.

Bemerkung: Es gibt auch Nicht-Gauß-Prozesse, bei denen schwache und starke Stationarität äquivalent sind.

Definition 2.14 Autokorrelationsfunktion (ACF)

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \frac{\gamma(h)}{\sigma^2} \qquad h \geq 0$$

heißt *Autokorrelationsfunktion.*

Beispiel:

(a) Poisson-Prozess:
Der Poisson-Prozess N ist nichtstationär, da $\mathrm{E}(N(t)) = \mathrm{Var}(N(t)) = \lambda t \neq constant$. Dagegen sind die Zuwächse stationär (und unabhängig).

(b) Wiener-Prozess:
Der Wiener-Prozess W ist ebenfalls nichtstationär, da zwar $\mathrm{E}(W(t)) = 0$, aber $\mathrm{Var}(W(t)) = \sigma^2 t$ gilt. Die Zuwächse sind stationär (und unabhängig).

(c) Zufällige trigonometrische Polynome:
A und B seien identisch verteilte, unkorrelierte ZVen mit Erwartungswert 0 und Varianz σ^2. Für eine feste Frequenz ω sei für $t \in \mathbb{Z}$

$$X_t = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

Dann ist $X = \{X_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ stationär mit $\mathrm{E}(X_t) = 0$ und

$$\begin{aligned}
\gamma(h) &= \mathrm{E}(X_t X_{t+h}) \\
&= \mathrm{E}\{(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))(A\cos(\omega(t+h)) + B\sin(\omega(t+h)))\} \\
&= \mathrm{E}\{A^2\cos(\omega t)\cos(\omega(t+h)) + B^2\sin(\omega t)\sin(\omega(t+h))\} \\
&= \sigma^2\cos(\omega h)
\end{aligned}$$

(d) Moving Average-Prozess:
Sei $\epsilon = \{\epsilon_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ eine Folge von unkorrelierten ZVen mit $\mathrm{E}(\epsilon_t) = 0, \quad \mathrm{Var}(\epsilon_t) = \sigma^2$. Ein solcher stationärer stochastischer Prozess heißt (diskretes) Weißes Rauschen. Gilt zusätzlich ϵ_t iid $\mathrm{N}(0, \sigma^2)$, so heißt ϵ Gauß'sches Weißes Rauschen.

Definition 2.15 Moving Average-Prozess

Der stochastische Prozess $X = \{X_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ mit

$$X_t = \sum_{j=0}^{q} \theta_j \epsilon_{t-j}, \quad \theta_q \neq 0$$

heißt moving average-Prozess (Prozess der gleitenden Durchschnitte) der Ordnung q, i.Z. $X \sim MA(q)$

Aus der Definition folgt sofort

$$\mathrm{E}(X_t) = \sum_{j=0}^{q} \theta_j \mathrm{E}(\epsilon_{t-j}) = 0.$$

Die Kovarianzfunktion berechnet sich wegen

$$\begin{aligned} X_t &= \theta_0\epsilon_t + \theta_1\epsilon_{t-1} + \ldots + \theta_{h-1}\epsilon_{t-h+1} + \theta_h\epsilon_{t-h} + \ldots + \theta_q\epsilon_{t-q} \\ X_{t-h} &= \theta_0\epsilon_{t-h} + \ldots + \theta_{q-h}\epsilon_{t-q} + \ldots + \theta_q\epsilon_{t-q-h} \end{aligned}$$

und

$$\mathrm{E}(\epsilon_t\epsilon_s) = \delta_{t,s}\sigma^2$$

zu

$$\gamma(h) = \mathrm{E}(X_t X_{t-h}) = \begin{cases} \sigma^2(\theta_0\theta_h + \theta_1\theta_{h+1} + \ldots + \theta_{q-h}\theta_q) & , \quad |\, h \,| \leq q \\ 0 & , \quad |\, h \,| > q. \end{cases}$$

Speziell ergibt sich

$$\mathrm{Var}(X_t) = \sigma_x^2 = \gamma(0) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{q} \theta_j^2.$$

Es gilt also:
Jeder $MA(q)$-Prozess (mit $q < \infty$) ist stationär mit ACF

$$\rho(h) = \begin{cases} \dfrac{\sum_{j=0}^{q-h} \theta_j\theta_{j+h}}{\sum_{j=0}^{q} \theta_j^2} & , \quad 0 \leq h \leq q \\ 0 & , \quad h > q. \end{cases}$$

(e) Modellierung ökonomischer Zeitreihen durch stationäre Prozesse:
Die Annahme, dass eine ökonomische Zeitreihe, d.h. eine Reihe von ökonomischen Daten $y_t,\ t = 1, 2, \ldots$ als Pfad eines stationären stochastischen Prozesses angesehen werden kann, ist oft nicht sehr realistisch. Stationäre Prozesse können aber als Baustein für realitätsgetreuere Modelle dienen. Unterstellt man etwa einen linearen Trend, so ist ein möglicher Ansatz

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 t + X_t,$$

wobei X selbst stationär ist. Allgemeiner geht man beim sogenannten Komponentensatz (Kap 8.1) davon aus, dass

$$Y_t = T_t + S_t + X_t$$

gilt, mit der Trendkomponente T_t und der Saisonkomponente S_t und X_t stationär, z.B. MA- oder AR-Prozess.

(f) Autoregressive Prozesse:
Gauß'sche Irrfahrt (Random walk):

$$\begin{aligned} X_0 &= 0 \\ X_t &= X_{t-1} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2) \quad \text{iid} \end{aligned}$$

Nichtstationär, da zwar $\mathrm{E}(X_t) = 0$ aber, $\mathrm{Var}(X_t) = t * \sigma^2$.

Aber: $AR(1)$-Prozess

$$X_t = \delta X_{t-1} + \epsilon_t \quad \text{mit} \quad \epsilon_t \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$$

mit $\mid \delta \mid < 1$ (zentrale Bedingung!) ist (für $t \to \infty$) stationär.

Man kann zeigen, dass für jeden Startwert X_0, die Verteilung von X_t für $t \to \infty$ gegen eine $\mathrm{N}(0, \frac{\sigma^2}{(1-\delta^2)})$ konvergiert. Alternativ kann man $\mathrm{N}(0, \frac{\sigma^2}{(1-\delta^2)})$ für X_0 schon fordern, d.h. der Prozess wird bereits im „Equilibrium“/„Gleichgewicht“ gestartet und es gilt (nicht nur asymptotisch, sondern exakt):

- $\mathrm{E}(X_t) = 0$
- $\mathrm{Var}(X_t) = \frac{\sigma^2}{(1-\delta^2)}$
- $\mathrm{Corr}(X_s, X_t) = \delta^{|s-t|}$, insbesondere $\mathrm{Corr}(X_t, X_{t+1}) = \delta$

Bei Vorliegen eines $AR(1)$-Prozess mit unbekanntem δ kann man also ρ durch die empirische Autokorrelation (zum Lag 1)

$$\frac{\frac{1}{T}\sum_{t=2}^{T}(X_t - \overline{X})(X_{t-1} - \overline{X})}{\widehat{\mathrm{Var}(X_t)}}$$

schätzen.

$\widehat{\mathrm{Var}(X_t)} = \frac{1}{T}\sum_{t=0}^{T}(X_t - \overline{X})^2 =$ empirische Varianz

$\to$ Mehr dazu in **Zeitreihenanalysen**

$\to$ $AR(p)$-Prozess etc.

$\to$ Schätzung der empirischen Korrelationsfunktion.

$$\widehat{\rho}(L) = \frac{\frac{1}{T}\sum_{t=L+1}^{T}(X_t - \overline{X})(X_{t-L} - \overline{X})}{\widehat{\mathrm{Var}(X_t)}}, \qquad L = \text{„Lag } L\text{“}.$$

(g) Stationäre Gauß-Prozesse:

$\{X(t), t \geq 0\}$ oder $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$

$\mathrm{E}(X(t)) = \mu$, $\mathrm{Var}(X(t)) = \sigma^2$

$\rho(h) = \mathrm{Corr}(X(t), X(t+h)) = \mathrm{Corr}(X(0), X(h))$ (vorgegebene Korrelationsfunktion)

Stationärer Gauß-Prozess $:\Leftrightarrow$ Für alle $n \geq 1$, $t_1, \ldots, t_n$ ist $X_{(n)} = (X(t_1), \ldots, X(t_n))'$ multivariat normalverteilt mit

$$E(X_{(n)}) = (\mu, \ldots, \mu)'$$

$$\mathrm{Cov}(X_{(n)}) = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \sigma^2\rho(t_2 - t_1) & \ldots & \sigma^2\rho(t_n - t_1) \\ \sigma^2\rho(t_1 - t_2) & \sigma^2 & & \sigma^2\rho(t_n - t_2) \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \sigma^2\rho(t_1 - t_{n-1}) & & \ddots & \sigma^2\rho(t_n - t_{n-1}) \\ \sigma^2\rho(t_1 - t_n) & \ldots & \sigma^2\rho(t_{n-1} - t_n) & \sigma^2 \end{pmatrix}$$