

Multivariate Verteilungen, Schätzen

Aufgabe 1:

Sei $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p)^T$ ein p -dimensionaler multivariat normalverteilter Zufallsvektor. Die Dichte von \mathbf{x} ist dann gegeben durch

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^p |\boldsymbol{\Sigma}|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right),$$

wobei $\boldsymbol{\mu}$ der Mittelwert und $\boldsymbol{\Sigma}$ die Kovarianz von \mathbf{x} sind.

- Berechnen Sie diese Dichte im Fall $p = 2$ mit den Bezeichnungen $\sigma_i^2 = \text{var}(x_i)$, $i = 1, 2$, und $\rho = \frac{\text{cov}(x_1, x_2)}{\sigma_1 \sigma_2}$. Folgern Sie daraus, dass x_1 und x_2 unabhängig sind, wenn sie unkorreliert sind.
- Stellen Sie die Dichte für $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$, für verschiedene Werte von σ_1 , σ_2 und ρ mit Hilfe von R graphisch dar. Nutzen Sie dazu beispielsweise die Funktionen `dmvnorm` (Paket: `mvtnorm`), `persp` und `contour`.

Aufgabe 2:

Sei $\mathbf{z} = (\mathbf{y}^T, \mathbf{x}^T)^T \sim \mathcal{N}_{q+p}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, wobei

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_y \\ \boldsymbol{\mu}_x \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_y & \boldsymbol{\Sigma}_{yx} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{xy} & \boldsymbol{\Sigma}_x \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Verteilungen der Komponentenvektoren \mathbf{y} und \mathbf{x} .

Aufgabe 3:

Seien \mathbf{x}_i , $i = 1, \dots, n$, iid. multivariat verteilte Zufallsvektoren mit Erwartungswert $\boldsymbol{\mu}$ und Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}$.

- Zeigen Sie, dass

$$\mathbf{S} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^T$$

ein erwartungstreuer Schätzer für die Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}$ ist.

- Es bezeichne

$$\text{MD}_i^2 = \|\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}\|_{\mathbf{S}^{-1}}^2 = (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})$$

die quadrierte Mahalanobis-Distanz zwischen \mathbf{x}_i und $\bar{\mathbf{x}}$. Zeigen Sie, daß folgendes gilt:

$$\sum_{i=1}^n \text{MD}_i^2 = (n-1)p.$$