Aufgabe 1

Beweisen Sie die Ungleichung von Tschebyscheff, d.h. zeigen Sie, dass

$$P(|X - E(X)| \geq c) \leq \frac{Var(X)}{c^2}, \quad c > 0.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Beziehung $P(|X - E(X)| \geq c) = P(|X - E(X)|^2 \geq c^2)$ und die Abschätzung $\sum_{k=c^2}^{\infty} c^2 \cdot a_k \leq \sum_{k=c^2}^{\infty} k \cdot a_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot a_k$.

Aufgabe 2

Sei X eine diskrete Zufallsvariable mit Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/8 & x = -1 \\ 6/8 & x = 0 \\ 1/8 & x = 1 \end{cases}$$

Berechnen Sie für $k = 2$ die Wahrscheinlichkeit $P\left(|X - E(X)| \geq k\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\right)$.

Aufgabe 3

Seien X,Y und Z beliebige Zufallsvariablen und $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie unter Verwendung des Verschiebungssatzes für Kovarianzen, dass

(a) $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$

(b) $Cov(aX, Y) = a \cdot Cov(X, Y)$

(c) $Cov(X + Y, Z) = Cov(X, Z) + Cov(Y, Z)$

Aufgabe 4

Seien X und Y Zufallsvariablen mit $E(X) = E(Y) = 0$ und $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) = 25$ und sei $W = X + Y$und $T = X - Y$.
Bestimmen Sie $\mathrm{Var}(W)$, $\mathrm{Var}(T)$, $\mathrm{Cov}(W, T)$ und $\rho(W, T)$ für den Fall, dass

(a) X und Y unabhängig sind.

(b) $\rho(X, Y) = -1/4$ gilt.

Aufgabe 5

Sei X eine stetige Zufallsvariable mit Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} c\,(x-2), & \text{für } 2 \leq x \leq 3, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$ derart, dass obige Funktion eine Dichtefunkton ist.

b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable X.

c) Berechnen Sie $P(-4 \leq X \leq 3 \,|\, X \leq 2.1)$.

d) Zeigen Sie, dass die Ereignisse $\{-4 \leq X \leq 3\}$ und $\{X \leq 2.1\}$ stochastisch unabhängig sind.

Aufgabe 6* (Abgabe bis Dienstag, 17.05, 12:00 Uhr (s.t.) über Moodle möglich)

Betrachten Sie nun die Funktion

$$h(x) = \begin{cases} cx^3 + x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & sonst. \end{cases}$$

Ermitteln Sie c, sodass $h(x)$ eine Dichte ist.