

Kapitel 4

Diskrete Markov-Prozesse

4.1 Definition und grundlegende Eigenschaften

- Stetige Zeit aber weiterhin diskreter Zustandsraum.
- Beispiele:
 - Klinische Studien, Krankenverläufe
 - Markenwahlprozesse
 - Poisson-Prozess
 - Stochastische Modelle für die molekulare Evolution, d.h. die durch Mutation verursachte Veränderung der Nukleotide A, T, C, G an bestimmten Positionen der DNA. Vereinfachende Annahme: Die Evolution an verschiedenen Positionen verläuft unabhängig. Dann genügt es, Modelle separat für die Positionen zu entwickeln.

Weitere Annahme: Homogenität und Stationarität. Verschiedene Modelle unterscheiden sich durch Annahmen an die Raten λ_{ij} für Übergänge $i \rightarrow j$.

- Definition: Diskreter Markov-Prozess

Ein stochastischer Prozess $X = \{X(t), t \geq 0\}$ mit abzählbarem Zustandsraum heißt (diskreter) Markov-Prozess $:\Leftrightarrow \forall n \geq 0, \forall t > s > s_n > \dots > s_0 \geq 0$ gilt

$$P(X(t) = j | X(s) = i, X(s_n) = i_n, \dots, X(s_0) = i_0) = P(X(t) = j | X(s) = i)$$

für beliebige $j, i, i_n, \dots, i_0 \in S$.

$$p_{ij}(s, t) := P(X(t) = j | X(s) = i)$$

heißt Übergangswahrscheinlichkeit(-sfunktion) und

$$P(s, t) = (p_{ij}(s, t))$$

Übergangsmatrix. Ein Markov-Prozess heißt homogen (oder besitzt stationäre Übergangswahrscheinlichkeiten) $:\Leftrightarrow$

$$P(X(t+s) = j | X(s) = i) = P(X(t) = j | X(0) = i) = p_{ij}(0, t) =: p_{ij}(t),$$

d.h. nur die Zeitdifferenz ist maßgeblich.

- Bemerkungen:
 - Wie bei den Markov-Ketten werden wir uns im Folgenden meist auf homogene Markov-Prozesse beschränken.
 - $p_{ij}(t)$ entspricht $p_{ij}^{(t)}$ (t -schrittige Übergangswahrscheinlichkeit) bei Markov-Ketten.
 - Für die Übergangswahrscheinlichkeiten gilt

$$p_{ij}(t) \geq 0, \quad \sum_{j \in S} p_{ij}(t) = 1$$

- Chapman-Kolmogorov-Gleichung (für homogene Markov-Prozesse)

$$p_{ij}(s+t) = \sum_{k \in S} p_{ik}(s)p_{kj}(t)$$

$$P(s+t) = P(s)P(t)$$

- Gemeinsame Verteilung: $\forall n \in \mathbb{N}, \forall 0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n \in \mathbb{R}_+, i_0, i_1, \dots, i_n \in S$ gilt

$$\begin{aligned} P(X(t_n) = i_n, \dots, X(t_1) = i_1 | X(t_0) = i_0) \\ = p_{i_0 i_1}(t_1 - t_0) \cdot \dots \cdot p_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X(t_n) = i_n, \dots, X(t_1) = i_1, X(t_0) = i_0) \\ = P(X(t_0) = i_0) \cdot p_{i_0 i_1}(t_1 - t_0) \cdot \dots \cdot p_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1}). \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Satz von Kolmogorov & Likelihood.

- Im Folgenden setzen wir stets voraus

$$p_{ij}(0) = \lim_{h \downarrow 0} p_{ij}(h) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

d.h. ein Übergang von i nach j ($i \neq j$) beansprucht eine positive Zeitspanne.

- Definition: (Übergangs-)Intensität, Rate

Für $i, j \in S$, $i \neq j$, heißt

$$\begin{aligned}\lambda_{ij} &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{p_{ij}(h)}{h} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{P(X(t+h) = j | X(t) = i)}{h} \\ &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{P(X(t+h) = j | X(t) = i, \text{Vorgeschichte})}{h} = p'_{ij}(0)\end{aligned}$$

Übergangsintensität bzw. Rate für den Übergang von i nach j .

Für $i = j$ definieren wir

$$\lambda_{ii} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{p_{ii}(h) - p_{ii}(0)}{h} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{p_{ii}(h) - 1}{h}.$$

Allgemein gilt also für $i, j \in S$

$$\lambda_{ij} = p'_{ij}(0) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{p_{ij}(h) - p_{ij}(0)}{h}$$

mit $0 \leq \lambda_{ij} < \infty$ für $i \neq j$, aber $\lambda_{ii} \leq 0$.

- $\Lambda = (\lambda_{ij})$ heißt Intensitätsmatrix.
- In $o(h)$ -Schreibweise gilt also für $i \neq j$

$$\begin{aligned}p_{ij}(h) &= P(X(t+h) = j | X(t) = i) = \lambda_{ij}h + o(h), \\p_{ii}(h) &= 1 + \lambda_{ii}h + o(h).\end{aligned}$$

- Beispiel: Poisson-Prozess

$$\begin{aligned}p_{i,i+1}(h) &= \lambda h + o(h) & \lambda_{i,i+1} &= \lambda \\p_{ij}(h) &= \begin{cases} 0, & 0 \leq j \leq i-1 \\ o(h), & j \geq i+2 \end{cases} & \lambda_{ij} &= \begin{cases} 0, & 0 \leq j \leq i-1 \\ 0, & j \geq i+2 \end{cases} \\p_{ii}(h) &= 1 - \lambda h + o(h) & \lambda_{ii} &= -\lambda\end{aligned}$$

4.2 Geburts- und Todesprozesse

- Definition: Geburtsprozess

Ein stochastischer Prozess $X = \{X(t), t \geq 0\}$ mit Zustandsraum $S \subseteq \mathbb{N}_0$ heißt Geburtsprozess $:\Leftrightarrow X$ ist ein homogener, diskreter MP mit

$$\begin{aligned}p_{i,i+1}(h) &= \lambda_i h + o(h), \\p_{i,i}(h) &= 1 - \lambda_i h + o(h), \quad \lambda_i \geq 0 \quad i \geq i_0 \\p_{i,j}(h) &= \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq j \leq i-1 \\ o(h) & , \quad j \geq i+2 \end{cases}\end{aligned}$$

- Datenstruktur wie beim Poisson-Prozess, aber zustandsabhängige Intensitäten λ_i .
- Analog zum Poisson-Prozess gilt

$$\lambda_{i,i+1} = \lambda_i, \quad \lambda_{ii} = -\lambda_i, \quad \lambda_{ij} = 0 \quad \text{für } j \notin \{i, i+1\}.$$

- Herleitung der Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p_{0n}(t) = P(X(t) = n \mid X(0) = 0)$$

aus den Intensitäten.

- Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{0n}(t) = 1 \quad \forall t \geq 0$$

ergibt sich genau dann, wenn

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} = \infty.$$

Gegenbeispiel: Rate $\lambda_i = 2^i$.

- Exponentialverteilte Verweildauern: Die Verweildauern T_n , $n \in \mathbb{N}$, im jeweiligen Zustand i sind unabhängig und exponentialverteilt mit Parameter λ_i , d.h.

$$T_n \sim \text{Ex}(\lambda_i).$$

- Interpretation: $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i}$ ist die erwartete Zeit bevor $\{X(t) = \infty\}$ eintritt. Falls die Summe divergiert scheint plausibel, dass $P\{X(t) = \infty\} = 0$ gilt.
- Yule-Prozess: Population mit Anfangsbestand von $X(0) = i_0$ Individuen.

Unabhängige Vermehrung, wobei jedes Individuum im Zeitintervall h mit Wahrscheinlichkeit $\lambda h + o(h)$ ein weiteres Mitglied der Population erzeugt und die Wahrscheinlichkeit für die Erzeugung mehrerer Individuen $o(h)$ sei.

Der binomische Lehrsatz liefert

$$p_{i,i+1}(h) = \binom{i}{1} (\lambda h + o(h)) (1 - \lambda h + o(h))^{i-1} = i\lambda h + o(h)$$

$$p_{i,j}(h) = \binom{i}{j-i} (\lambda h + o(h))^{j-i} (1 - \lambda h + o(h))^{i-(j-i)} = o(h) \text{ für } j - i \geq 2.$$

$\Rightarrow$ Geburtsprozess mit Rate $\lambda_i = i\lambda$.

$X(t) - i_0$ besitzt eine negative Binomialverteilung mit Parametern i_0 und $\exp(-\lambda t)$.

$$E(X(t) - i_0) = \frac{i_0(1 - \exp(-\lambda t))}{\exp(-\lambda t)},$$

$$Var(X(t) - i_0) = \frac{i_0(1 - \exp(-\lambda t))}{\exp(-2\lambda t)}$$

$\Rightarrow$ exponentielles Wachstum:

$$E(X(t)) = i_0 \exp(\lambda t),$$

$$Var(X(t)) = i_0 \exp(\lambda t)(\exp(\lambda t) - 1).$$

- Definition: Geburts- und Todesprozess

Ein stochastischer Prozess $X = \{X(t), t \geq 0\}$ mit Zustandsraum $S \subseteq \mathbb{N}_0$ heißt Geburts- und Todesprozess $:\Leftrightarrow X$ ist ein homogener, diskreter MP mit

$$\begin{aligned}p_{i,i+1}(h) &= \lambda_i h + o(h) & i \geq 0 \\p_{i,i-1}(h) &= \mu_i h + o(h) & i \geq 1 \\p_{ii}(h) &= 1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h) & i \geq 0 \\p_{ij}(h) &= o(h) & |i - j| \geq 2, \quad i, j \geq 0\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}\mu_0 &= 0, \\ \lambda_0 &\geq 0 \quad (> 0 \text{ reflektierend}, = 0 \text{ absorbierend}), \\ \mu_i, \lambda_i &\geq 0 \quad \text{für } i \geq 1.\end{aligned}$$

Für die Intensitäten gilt also

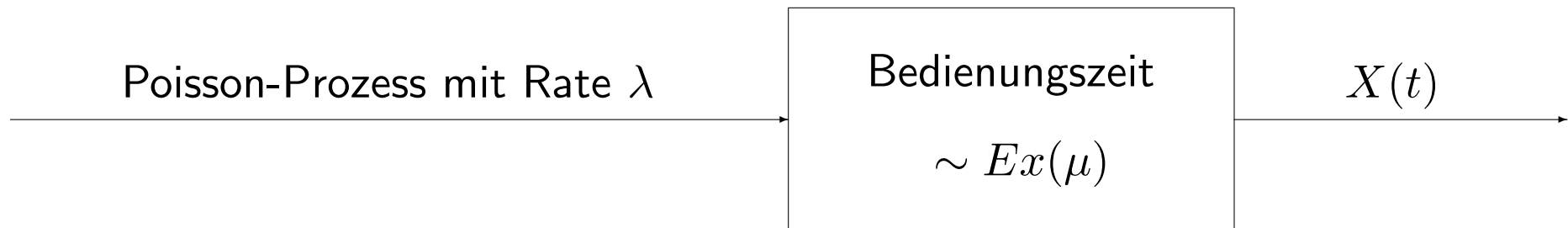
$$\lambda_{i,i+1} = \lambda_i,$$

$$\lambda_{i,i-1} = \mu_i,$$

$$\lambda_{ij} = 0 \text{ für } |i - j| \geq 2,$$

$$\lambda_{ii} = -(\lambda_i + \mu_i)$$

- Die explizite Berechnung der Übergangsmatrix $P(t)$ aus Λ ist i.A. nicht möglich.
- Das Wartesystem $M/M/1/\infty$



Die Anzahl der im System befindlichen Kunden $X(t)$ ist ein spezieller Geburts-Todes-Prozess mit $\lambda_i = \lambda$ und $\mu_i = \mu$.

Für $\lambda < \mu$ existiert die Grenzverteilung p_j :

$$p_j = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t) = (1 - r)r^j, \quad r = \frac{\lambda}{\mu}$$

$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = X(\infty)$ geometrisch verteilt mit

$$E(X(\infty)) = \frac{r}{1 - r}, \quad \text{Var}(X(\infty)) = \frac{r}{(1 - r)^2}$$

- Varianten:

- begrenzte Kapazität N des Warteraums (M/M/1/N)

$$\lambda_i = \begin{cases} \lambda & 0 \leq i \leq N \\ 0 & i > N \end{cases}$$

- von der Länge der angetroffenen Warteschlange verursachte Entmutigung, z.B.

$$\lambda_i = \frac{\lambda}{(i + 1)}, \quad i = 0, 1, \dots$$

- Das Wartesystem $M/M/s/\infty$: s Schalter jeweils mit Rate μ
 $X(t)$ Geburts-Todes-Prozess mit

$$\lambda_i = \lambda \quad \text{und} \quad \mu = \begin{cases} \mu i, & i = 1, \dots, s \\ \mu s, & i = s + 1, \dots \end{cases}$$

Grenzverteilung existiert für $\lambda < s\mu$.

- Modelle zur Bevölkerungsentwicklung

Verallgemeinerung des Yule-Prozess mit Geburtsrate $\lambda_i = i\lambda$ und Sterberate $\mu_i = i\mu$

Für $X(0) = 1$ kann man zeigen:

$$E(X(t)) = \exp((\lambda - \mu)t) \quad (\text{für } \lambda \neq \mu)$$

$$\text{Wahrscheinlichkeit des Aussterbens} = \begin{cases} 1, & \lambda \leq \mu \\ \frac{\mu}{\lambda}, & \lambda > \mu \end{cases}$$

- Struktur der Pfade von Geburts- und Todesprozessen

Wahrscheinlichkeit für Verlassen des Zustands i im Intervall $(t, t + h]$:

$$(\lambda_i + \mu_i)h + o(h).$$

$\Rightarrow \text{Exp}(\lambda_i + \mu_i)$ -verteilte Verweildauern (analog zum Poisson-Prozess).

Wahrscheinlichkeit für Zustandsänderung $i \rightarrow i + 1$: $\lambda_i h + o(h)$

Wahrscheinlichkeit für Zustandsänderung $i \rightarrow i - 1$: $\mu_i h + o(h)$

Unter der Bedingung, dass eine Zustandsänderung stattfindet, erhält man also die bedingten Wahrscheinlichkeiten

$$\begin{array}{ll} \frac{\lambda_i}{(\lambda_i + \mu_i)} & \text{Übergang } i \rightarrow i + 1 \\ \frac{\mu_i}{(\lambda_i + \mu_i)} & \text{Übergang } i \rightarrow i - 1 \end{array}$$

- Vorgehen zur Simulation:

Der aktuelle Zustand sei i . Realisiere eine $Exp(\lambda_i + \mu_i)$ -verteilte Zufallsvariable, um die Verweildauer in i zu erhalten. Entscheide dann anhand eines Bernoulli-Experiments mit den obigen Wahrscheinlichkeiten, welcher der zwei möglichen Zustandswechsel eintritt.

4.3 Skizze der allgemeinen Theorie

- Voraussetzungen: $p_{ij}(0) = \lim_{h \downarrow 0} p_{ij}(h) = \delta_{ij}$, Pfade (mit W'keit 1) rechtsseitig stetig.

Bezeichnungen:

- S_n Zeitpunkt der n -ten Zustandsänderung, $S_0 = 0$,
- $Y_n = X(S_n)$ zum Zeitpunkt S_n angenommener Zustand,
- $T_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ Verweildauer in Y_n ,
- $S_{n+1} = S_n + T_{n+1}$.
- Falls absorbierende Zustände Y_n möglich sind, d.h. $S_{n+1} = \infty$,

$$Y_{n+1} = \begin{cases} Y_n, & S_{n+1} = \infty \\ X(S_{n+1}), & S_{n+1} < \infty. \end{cases}$$

- $V(t)$ Vorwärtsrekurrenzzzeit: Dauer von t an bis zur nächsten Zustandsänderung

- Exponentialverteilte Verweildauern:

Die Verweildauern T_n , $n \in \mathbb{N}$ sind exponentialverteilt mit Parameter λ_i , gegeben $Y_{n-1} = i$. Für jeden Zeitpunkt t gilt

$$P(V(t) \leq s | X(t) = i) = 1 - e^{-\lambda_i s}, \quad s \geq 0,$$

die Vorwärtsrekurrenzzzeit ist also ebenfalls exponentialverteilt mit Parameter λ_i .

- Definition: Zustand i ist

absorbierend $:\Leftrightarrow \lambda_i = 0$

stabil $:\Leftrightarrow 0 < \lambda_i < \infty$

instabil $:\Leftrightarrow \lambda_i = \infty$

- Falls i absorbierend ist, gilt für alle $s \geq 0$

$$P(V(t) > s \mid X(t) = i) = P(X(t + s) = i \mid X(t) = i) = 1.$$

Der Zustand i wird mit W'keit 1 nicht mehr verlassen.

Falls i stabil ist, gilt

$$P(0 < V(t) < \infty \mid X(t) = i) = 1.$$

X verweilt in i eine positive, aber endliche Zeit (mit W'keit 1).

Falls i instabil ist, gilt

$$P(V(t) = 0 \mid X(t) = i) = 1.$$

Der MP verlässt einen instabilen Zustand sofort wieder. Dies führt zu nicht rechtsseitig stetigen Pfaden. Daher sind instabile Zustände im weiteren ausgeschlossen.

- **Struktursatz:** Sei X ein Markov-Prozess mit rechtsseitig stetigen Pfaden. Dann gilt $\forall n \in \mathbb{N}_0 \ \forall j, i, \dots, i_0 \in S \ \forall t, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R} \ \forall 0 < s_1 \dots < s_n$
 1. $P(Y_{n+1} = j, T_{n+1} > t | Y_n = i, \dots, Y_0 = i_0, S_n = s_n, \dots, S_0 = 0) = q_{ij} e^{-\lambda_i t}$
mit $q_{ij} \geq 0, \sum_{j \in S} q_{ij} = 1, q_{ii} = \begin{cases} 0 & , i \text{ stabil} \\ 1 & , i \text{ absorbierend} \end{cases}$
 2. $\{Y_n, n \in \mathbb{N}\}$ ist eine Markov-Kette mit Übergangsmatrix $Q = (q_{ij})$
 3. $P(T_{n+1} > t | Y_n = i, Y_{n+1} = j) = P(T_{n+1} > t | Y_n = i) = e^{-\lambda_i t}$
 4. $P(T_1 > t_1, \dots, T_n > t_n | Y_n = i, \dots, Y_0 = i_0) = e^{-\lambda_{i_0} t_1} \dots e^{-\lambda_{i_{n-1}} t_n}$

- Bemerkungen:

- (a) $\{Y_n, n \in \mathbb{N}\}$ heißt eingebettete Markov-Kette. Erreichbarkeits- / Rekurrenzeigenschaften der eingebetteten Markov-Kette übertragen sich auf diskreten Markov-Prozess.
- (b) Aussage 3 besagt, dass λ_i nur vom eben besuchten Zustand, nicht aber vom nächsten abhängt.
- (c) Aussage 4 besagt, dass die Verweildauern exponentialverteilt und bedingt unabhängig sind, wenn die Folge der besuchten Zustände gegeben ist.
- (d) Der Struktursatz liefert auch die gemeinsame Verteilung von $\{T_n, Y_n\}$ und damit die Likelihood zur ML-Schätzung der Strukturparameter λ_i und q_{ij} (bzw. der Intensitäten λ_{ij}):

$$\begin{aligned}
 & P(T_1 > t_1, \dots, T_n > t_n, Y_0 = i_0, Y_1 = i_1, \dots, Y_n = i_n) \\
 &= P(T_1 > t_1, \dots, T_n > t_n \mid Y_0 = i_0, Y_1 = i_1, \dots, Y_n = i_n) \\
 &\quad \cdot P(Y_0 = i_0, Y_1 = i_1, \dots, Y_n = i_n) \\
 &= e^{-\lambda_{i_0} t_1} \cdot \dots \cdot e^{-\lambda_{i_{n-1}} t_n} \cdot P(Y_0 = i_0) \cdot q_{i_0 i_1} \cdot \dots \cdot q_{i_{n-1} i_n}
 \end{aligned}$$

- Konstruktion bzw. Simulation der Pfade eines Markov-Prozesses:
 - Startwert $X(\omega, 0) = Y_0(\omega) = i_0$
 - Im Zustand $Y_n(\omega) = i_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, bestimmt man gemäß der Verteilung $q_{i_n j}$, $j \in S$, den nächsten Zustand $Y_{n+1}(\omega) = i_{n+1}$.
 - Die Verweildauer $T_{n+1}(\omega) = t_{n+1}$ in i_n bis zum Sprung nach i_{n+1} wird gemäß einer λ_{i_n} -Exponentialverteilung realisiert.
- Definition: Regulärer Markov-Prozess

Ein Markov-Prozess heißt regulär, wenn er die folgenden Eigenschaften besitzt:

1. $p_{ij}(0) = \lim_{h \downarrow 0} p_{ij}(h) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$
2. Pfade (mit Wahrscheinlichkeit 1) rechtsseitig stetig.
3. $\sup_n S_n = +\infty$.

- Regularitätskriterien

Ein Markov-Prozess, der die Eigenschaften 1. und 2. erfüllt ist regulär, falls eine der folgenden Eigenschaften gilt:

1. S ist endlich.
2. $\lambda_i \leq c$ für alle $i \in S$.
3. Alle Zustände der eingebetteten Markov-Kette Y sind rekurrent.
4. Die Markov-Kette Y verbleibt mit Wahrscheinlichkeit 0 in einer transienten Klasse.

- Intensitäten und Strukturparameter

X sei ein regulärer MP. Dann sind die Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ij}(t)$ stetig differenzierbar und es gilt

$$p'_{ij}(0) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{p_{ij}(h) - p_{ij}(0)}{h} = \lambda_{ij} = \begin{cases} -\lambda_i, & i = j \\ \lambda_i q_{ij}, & i \neq j, \end{cases}$$

bzw. in $o(h)$ -Schreibweise

$$P(X(t+h) = j | X(t) = i) = h\lambda_i q_{ij} + o(h), \quad i \neq j$$

$$P(X(t+h) = i | X(t) = i) = 1 - \lambda_i h + o(h).$$

In Matrixschreibweise (S endlich):

$$P(h) = I + \Lambda h + o(h).$$

bzw.

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{P(h) - I}{h} = P'(0) = \Lambda.$$

Die Zeilensummen der Intensitätsmatrix Λ sind gleich 0, d.h. für alle $i \in S$ gilt

$$\lambda_{ii} = -\lambda_i = - \sum_{j \in S, j \neq i} \lambda_{ij}.$$

- Bestimmung der Übergangswahrscheinlichkeiten $P(t)$ aus Λ

Sei X ein regulärer Markov-Prozess. Dann ist die Übergangsmatrix $P(t) = (p_{ij}(t))$ durch die Übergangsmatrix Q der eingebetteten Markov-Kette Y und die Parameter λ_i der Verweildauern bzw. die Intensitätsmatrix Λ eindeutig bestimmt. Die Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ij}(t)$ sind Lösung von

$$1. \quad p'_{ij}(t) = \sum_{k \in S} \lambda_{ik} p_{kj}(t) \quad \text{bzw.} \quad P'(t) = \Lambda P(t), \quad P(0) = I$$

(Rückwärtsgleichungen von Kolmogorov)

$$2. \quad p'_{ij}(t) = \sum_{k \in S} p_{ik}(t) \lambda_{kj} \quad \text{bzw.} \quad P'(t) = P(t) \Lambda, \quad P(0) = I$$

(Vorwärtsgleichungen von Kolmogorov)

3. Für endliches S ist die Lösung gegeben durch

$$P(t) = e^{t\Lambda} = I + t\Lambda + \frac{(t\Lambda)^2}{2!} + \frac{(t\Lambda)^3}{3!} + \dots$$

Die (numerische) Berechnung erfolgt mit Hilfe der Spektralzerlegung von Λ

$$\Lambda = U \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_m) U^{-1},$$

mit den Eigenwerten $d_1, \dots, d_m$ und der Matrix U der Eigenvektoren. Dann gilt

$$P(t) = U \operatorname{diag}(e^{d_1 t}, \dots, e^{d_m t}) U^{-1}.$$

- Beispiel: Markov-Prozess mit 2 Zuständen

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Eigenwertzerlegung von Λ :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} P(t) &= U \operatorname{diag}(e^{d_1 t}, e^{d_2 t}) U^{-1} \\ &= \dots \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} + e^{-3t} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Bemerkung: Es existiert der Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

- Beispiel: Allgemeiner Markov-Prozess mit 2 Zuständen

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}.$$

Die Kolmogorov-Gleichung $P'(t) = P(t)\Lambda$ ergibt

$$\begin{pmatrix} p'_{00}(t) & p'_{01}(t) \\ p'_{10}(t) & p'_{11}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{00}(t) & p_{01}(t) \\ p_{10}(t) & p_{11}(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow p'_{00}(t) = -\lambda p_{00}(t) + \mu p_{01}(t), \quad p_{01}(t) = 1 - p_{00}(t),$$

$$\Rightarrow p'_{00}(t) = +\mu - (\lambda + \mu)p_{00}(t).$$

Lösung:

$$p_{00}(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}$$

$$p_{01}(t) = 1 - p_{00}(t)$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda + \mu} - \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}$$

Aus Symmetriegründen erhält man

$$\begin{aligned} p_{11}(t) &= \frac{\lambda}{\lambda + \mu} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t} \\ p_{10}(t) &= \frac{\mu}{\lambda + \mu} - \frac{\mu}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t} \end{aligned}$$

Grenzwert:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \begin{pmatrix} \frac{\mu}{\lambda + \mu} & \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \\ \frac{\mu}{\lambda + \mu} & \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \end{pmatrix}.$$

- Die Zustände eines Markov-Prozesses werden anhand der eingebetteten Markov-Kette klassifiziert (Rekurrenz, Erreichbarkeit, Periodizität, etc.).
- Für transientes j folgt aus $\lim_{t \rightarrow \infty} q_{ij}^{(t)} = 0$ für die t -Schritt ÜW $q_{ij}^{(t)}$ auch $\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t) = 0$. Für Grenzwertsätze daher Beschränkung auf irreduzible, rekurrente MP.

- Grenzwertsatz:

Sei X ein regulärer, positiv-rekurrenter und irreduzibler Markov-Prozess. Dann gilt:

1. $\lim_{t \rightarrow \infty} P(X(t) = j) = \pi_j$ existiert $\forall j \in S$, und ist von der Anfangsverteilung unabhängig.

2. Die Grenzverteilung π läßt sich berechnen über

(a) $\pi_j = \frac{\mu_j}{\sum_i \mu_i}$ mit $\mu\Lambda = 0$ bzw.

(b) $\pi_j = \frac{\nu_j/\lambda_j}{\sum_i \nu_i/\lambda_i}$ mit $\nu = \nu Q$.

3. $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \begin{pmatrix} \pi \\ \vdots \\ \pi \\ \vdots \\ \pi \end{pmatrix}$

4. $\pi = (\dots, \pi_j, \dots)$ ist strikt positiv.

5. π ist die einzige stationäre Verteilung von X , d.h. es gilt

$$\pi = \pi \cdot P(t) \quad \forall t \geq 0.$$

- Beispiel: Markov-Prozess mit zwei Zuständen

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & -\lambda_2 \end{pmatrix}$$

Möglichkeit 1: Über die Intensitätsmatrix $\mu\Lambda = 0$

$$-\mu_1\lambda_1 + \mu_2\lambda_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\mu_1\lambda_1 + (1 - \mu_1)\lambda_2 = 0$$

$$\mu_1\lambda_1 - \mu_2\lambda_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_2 - \mu_1(\lambda_1 + \lambda_2) = 0$$

$$\Rightarrow \mu_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad \mu_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Möglichkeit 2: Über die eingebettete Markov-Kette $\nu = \nu Q$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

stationäre Verteilung:

$$\nu = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right).$$

Grenzverteilung ist proportional zu $\left(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2} \right)$:

$$(\pi_1, \pi_2) = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right).$$

- Peter Prinzip: Drei berufliche Kategorien in einem Betrieb: T Trainee, J Junior, S Senior

$$\Lambda = \begin{array}{c} T \\ J \\ S \end{array} \begin{pmatrix} T & J & S \\ -\lambda_T & \lambda_T & 0 \\ \lambda_{JT} & -\lambda_J & \lambda_{JS} \\ \lambda_S & 0 & -\lambda_S \end{pmatrix}.$$

Grenzverteilung: $\pi = (\pi_T, \pi_J, \pi_S)$

$$\lambda_T \pi_T = \lambda_{JT} \pi_J + \lambda_S \pi_S$$

$$\lambda_J \pi_J = \lambda_T \pi_T$$

$$\lambda_S \pi_S = \lambda_{JS} \pi_J$$

$$1 = \pi_T + \pi_J + \pi_S.$$

Lösung ist

$$\pi_T = \frac{\lambda_S \lambda_J}{N}, \quad \pi_J = \frac{\lambda_S \lambda_T}{N}, \quad \pi_S = \frac{\lambda_T \lambda_{JS}}{N}.$$

mit $N = \lambda_S \lambda_J + \lambda_S \lambda_T + \lambda_T \lambda_{JS}$.

4.4 Inferenz

- Zwei mögliche Situationen in Anwendungen:
 1. Vollständige Kenntnis über einen oder mehrere Pfade.
 2. Beobachtungen nur zu Zeitpunkten $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, d.h. Pfade nicht vollständig beobachtet.
- In beiden Situationen: Likelihood-basierte Inferenz für die Strukturparameter $\Lambda = \{\lambda_{ij}\}$ bzw. $Q = \{q_{ij}\}$, $\lambda = \{\lambda_i\}$.
- Situation 1:

Die Likelihood wird gemäß Struktursatz bestimmt:

$$P(Y_n = i_n, T_n > t_n | Y_{n-1} = i_{n-1}, S_{n-1} = s_{n-1}, \dots, Y_0 = i_0, S_0 = 0) = q_{i_{n-1}i_n} e^{-\lambda_{i_{n-1}} t_n}.$$

$\Rightarrow$ Gemeinsame (bedingte) Dichte für Y_n diskret, T_n stetig (bezüglich Produktmaß aus Zählmaß und Lebesgue-Maß):

$$q_{i_{n-1}i_n} \lambda_{i_{n-1}} e^{-\lambda_{i_{n-1}} t_n}.$$

Likelihood $L(\lambda_{ij}|i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i_n, t_1, \dots, t_n)$:

$$\begin{aligned} L(\lambda_{ij}) &= p_{i_0}(0) \cdot q_{i_0 i_1} \lambda_{i_0} e^{-\lambda_{i_0} t_1} \cdot \dots \cdot q_{i_j i_{j+1}} \lambda_{i_j} e^{-\lambda_{i_j} t_{j+1}} \cdot \dots \cdot q_{i_{n-1} i_n} \lambda_{i_{n-1}} e^{-\lambda_{i_{n-1}} t_n} \\ &= p_{i_0}(0) \prod_{i \in S} \{ \exp(-\lambda_i \gamma_i) \cdot \prod_{j \in S, j \neq i} (q_{ij} \lambda_i)^{n_{ij}} \} \end{aligned}$$

mit γ_i gesamte Verweildauer in i und n_{ij} Gesamtzahl der Übergänge $i \rightarrow j$.

Log-Likelihood (ohne $p_{i_0}(0)$):

$$\begin{aligned} l(\lambda_{ij}) &= \sum_{i \in S} -\lambda_i \gamma_i + \sum_{i, j \in S, i \neq j} n_{ij} \log(\lambda_{ij}) \\ &= \sum_{i, j; i \neq j} (-\lambda_{ij} \gamma_i + n_{ij} \log(\lambda_{ij})) \\ \frac{\partial l(\lambda_{ij})}{\partial \lambda_{ij}} &= -\gamma_i + \frac{n_{ij}}{\lambda_{ij}} \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Damit ergeben sich die ML-Schätzer

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_{ij} &= \frac{n_{ij}}{\gamma_i} \\ \hat{\lambda}_i &= \frac{n_i}{\gamma_i}, \text{ mit } n_i = \sum_j n_{ij} \\ \hat{q}_{ij} &= \frac{\hat{\lambda}_{ij}}{\hat{\lambda}_i} = \frac{n_{ij}/\gamma_i}{n_i/\gamma_i} = \frac{n_{ij}}{n_i}\end{aligned}$$

$\hat{\lambda}_{ij}$ ist konsistent für λ_{ij} mit asymptotischer Varianz $\frac{n_{ij}}{\gamma_i^2}$.

- Situation 2: Daten $X(t_1) = i_1, \dots, X(t_n) = i_n \Rightarrow$ Likelihood

$$L(\lambda_{ij} | X(t_1) = i_1, \dots, X(t_n) = i_n) = p_{i_0}(0) p_{i_1 i_2}(t_2 - t_1) \cdot \dots \cdot p_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1})$$

Die Übergangswahrscheinlichkeiten müssen dabei aus den Kolmogorov-Gleichungen bzw. über die Spektralzerlegung von Λ bestimmt werden.

$\Rightarrow$ Numerisch aufwendig.