

Lösungsvorschlag Blatt 6 / Aufgabe 3

$\mathcal{C}^{(\nu-1)} \rightarrow \mathcal{C}^{(\nu)} \Rightarrow C_m, C_{\tilde{m}} \in \mathcal{C}^{(\nu-1)}$ werden zusammengefasst
 $\rightarrow C := C_m \cup C_{\tilde{m}}$ neue Klasse

Rekursion:

$$D(C, C_k) = \alpha_m D(C_m, C_k) + \alpha_{\tilde{m}} D(C_{\tilde{m}}, C_k) + \beta D(C_m, C_{\tilde{m}}) + \gamma |D(C_m, C_k) - D(C_{\tilde{m}}, C_k)|$$

a) Single-Linkage: $D(C_i, C_j) = \min_{a_r \in C_i, a_s \in C_j} \{d_{rs}\}$

zu zeigen: $\alpha_m = \alpha_{\tilde{m}} = \frac{1}{2}$, $\beta = 0$, $\gamma = -\frac{1}{2}$

- Nach der Rekursionsformel gilt:

$$D(C, C_k) = \frac{1}{2} [D(C_m, C_k) + D(C_{\tilde{m}}, C_k)] - \frac{1}{2} |D(C_m, C_k) - D(C_{\tilde{m}}, C_k)|$$

und damit

$$\begin{aligned} D(C_m, C_k) \leq D(C_{\tilde{m}}, C_k) &\Rightarrow D(C, C_k) = D(C_m, C_k) \\ D(C_m, C_k) > D(C_{\tilde{m}}, C_k) &\Rightarrow D(C, C_k) = D(C_{\tilde{m}}, C_k) \end{aligned} \quad (1)$$

- Nach Definition gilt für Single Linkage:

$$D(C, C_k) = \begin{cases} D(C_m, C_k) & \text{falls } D(C_m, C_k) \leq D(C_{\tilde{m}}, C_k) \\ D(C_{\tilde{m}}, C_k) & \text{falls } D(C_m, C_k) > D(C_{\tilde{m}}, C_k) \end{cases} \quad (2)$$

$\Rightarrow$ Vergleich von (1) und (2) liefert den Beweis!

b) Complete-Linkage: $D(C_i, C_j) = \max_{a_r \in C_i, a_s \in C_j} \{d_{rs}\}$

zu zeigen: $\alpha_m = \alpha_{\tilde{m}} = \frac{1}{2}$, $\beta = 0$, $\gamma = \frac{1}{2}$

- Nach der Rekursionsformel gilt:

$$D(C, C_k) = \frac{1}{2} [D(C_m, C_k) + D(C_{\tilde{m}}, C_k)] + \frac{1}{2} |D(C_m, C_k) - D(C_{\tilde{m}}, C_k)|$$

und damit

$$\begin{aligned} D(C_m, C_k) \geq D(C_{\tilde{m}}, C_k) &\Rightarrow D(C, C_k) = D(C_m, C_k) \\ D(C_m, C_k) < D(C_{\tilde{m}}, C_k) &\Rightarrow D(C, C_k) = D(C_{\tilde{m}}, C_k) \end{aligned} \quad (3)$$

- Nach Definition gilt für Complete Linkage:

$$D(C, C_k) = \begin{cases} D(C_m, C_k) & \text{falls } D(C_m, C_k) \geq D(C_{\tilde{m}}, C_k) \\ D(C_{\tilde{m}}, C_k) & \text{falls } D(C_m, C_k) < D(C_{\tilde{m}}, C_k) \end{cases} \quad (4)$$

$\Rightarrow$ Vergleich von (3) und (4) liefert den Beweis!