

Multivariate Regression

Aufgabe 1:

Es sei das multivariate Regressionsmodell

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{B} + \mathbf{E}$$

gegeben, wobei $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times (p+1)}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{(p+1) \times q}$ und $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{n \times q}$. Dabei besteht $\mathbf{E}$ zeilenweise aus unabhängigen identisch verteilten Vektoren, und es gilt für die i -te Zeile $\boldsymbol{\epsilon}_i$ von $\mathbf{E}$

$$\begin{aligned} E(\boldsymbol{\epsilon}_i) &= \mathbf{0} \\ E(\boldsymbol{\epsilon}_i^T \boldsymbol{\epsilon}_i) &= \boldsymbol{\Sigma}. \end{aligned}$$

Schreiben Sie das Modell in der multiplen Form

$$\mathbf{z} = \mathbf{W}\mathbf{b} + \boldsymbol{\epsilon},$$

wobei $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{? \times 1}$, $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{? \times ?}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{? \times 1}$ und $\boldsymbol{\epsilon} \in \mathbb{R}^{? \times 1}$. Für die „?“ sind dabei die entsprechenden Dimensionen einzusetzen. Geben Sie die Kovarianzmatrix von $\boldsymbol{\epsilon}$ an.

Aufgabe 2:

Für ein multivariates Regressionsmodell $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{B} + \mathbf{E}$ mit den Matrizen $\mathbf{Y}$ ($n \times q$), $\mathbf{X}$ ($n \times (p+1)$), $\mathbf{B}$ ($(p+1) \times q$) und $\mathbf{E}$ ($n \times q$) sei $\hat{\mathbf{B}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$ der KQ-Schätzer und $\mathbf{H} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$ die Hat-Matrix. Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Beziehungen

- a) $\hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{Y}'\mathbf{H}\mathbf{Y}$,
- b) $(\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}})'(\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}) = \mathbf{Y}'(\mathbf{I} - \mathbf{H})\mathbf{Y}$,
- c) $\mathbf{Y}'\mathbf{Y} = \hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\mathbf{B}} + (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{B}})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{B}})$.

Das Modell werde nun folgendermaßen partitioniert: $\mathbf{Y} = \mathbf{X}_1\mathbf{B}_1 + \mathbf{X}_2\mathbf{B}_2 + \mathbf{E}$ mit $\mathbf{X}_1$ ($n \times v$), $\mathbf{X}_2$ ($n \times r$) und $v + r = p + 1$. Sei $\tilde{\mathbf{B}}_1$ der KQ-Schätzer des reduzierten Modells $\mathbf{Y} = \mathbf{X}_1\mathbf{B}_1 + \mathbf{E}$. Zeigen Sie, dass

- d) $(\mathbf{Y} - \mathbf{X}_1\tilde{\mathbf{B}}_1)'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}_1\tilde{\mathbf{B}}_1) = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{B}})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{B}}) + \hat{\mathbf{B}}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\mathbf{B}} - \tilde{\mathbf{B}}_1'\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1\tilde{\mathbf{B}}_1$ gilt.
- e) Betrachten Sie den Spezialfall $v = 1$, $r = p$.

Aufgabe 3:

Für ein multivariates Regressionsmodell $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{B} + \mathbf{E}$ betrachte man die linearen Nullhypothesen der Form $H_0 : \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{D} = \mathbf{0}$. Verbalisieren Sie für die nachstehenden Versionen dieser allgemeinen Form die konkret vorliegende Testsituation.

a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{B} = \mathbf{0},$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{B} = \mathbf{0},$

c) $\mathbf{B} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$