

Hinweis: Nach einer Wiederholung von frequentistischer und bayesianischer Glättung von Zeitreihen soll diese Aufgabe im Tutorium selbstständig bearbeitet werden. Die Lösung wird am Ende vorgestellt.

Aufgabe 7 (Glättung einer Zeitreihe)

Sei \mathbf{y} eine Zeitreihe. Gegeben sei das folgende Modell:

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\epsilon}, \quad \boldsymbol{\epsilon} \sim N_n(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$$

Zur Schätzung von $\boldsymbol{\gamma}$ soll das penalisierte KQ-Kriterium mit Bestrafung der Differenzen erster Ordnung verwendet werden. Der Penalisierungsterm hat also die Form

$$\text{pen}(\boldsymbol{\gamma}) = \sum_{t=2}^n (\Delta^1 \gamma_t)^2 = \boldsymbol{\gamma}' \mathbf{K}_1 \boldsymbol{\gamma}.$$

Sei $n = 4$, d.h. es liegen vier Beobachtungszeitpunkte vor.

- (a) Berechnen Sie die Strafmatrix \mathbf{K}_1 .
- (b) Zeigen Sie, dass die gemeinsame Priori für $\boldsymbol{\gamma}$ folgendermaßen aussieht

$$p(\boldsymbol{\gamma}) \propto \exp\left(-\frac{1}{2\tau^2} \boldsymbol{\gamma}' \mathbf{K}_1 \boldsymbol{\gamma}\right),$$

wenn man Irrfahrten erster Ordnung

$$\text{RW}(1) : \gamma_t = \gamma_{t-1} + u_t, \quad u_t \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, \tau^2), \quad t = 2, \dots, n$$

verwendet und für den ersten Zeitpunkt eine uneigentliche Priori der Form

$$p(\gamma_1) \propto \text{const}$$

annimmt.