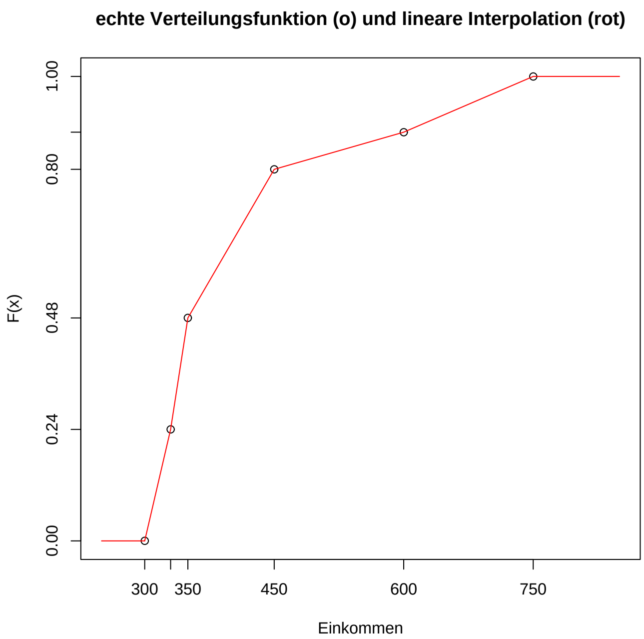
Theorie Aufgabe 13

Theorie: Lineare Interpolation

- Absolute Häufigkeiten für klassierte Daten eines Merkmals X mit k Klassen sind folgendermaßen definiert
$$h_j = h(c_{j-1} \leq X < c_j), \quad j = 1, \dots, k,$$
mit Klassengrenzen $c_0 < c_1 < \dots c_k$.
- Die kumulierte relative Häufigkeitsverteilung lässt sich graphisch folgendermaßen veranschaulichen:



- Idee: Approximation durch Polygonzug (d.h. eine stückweise lineare Funktion)
- Annahme: Merkmalswerte sind innerhalb jeder der Klassen gleichverteilt.
- Dazu wird die lineare Interpolation verwendet: Gegeben sind jeweils zwei Punkte $(c_{j-1}, F(c_{j-1}))$ und $(c_j, F(c_j))$, wobei F die echte Verteilungsfunktion bezeichnet, die nur an einzelnen Punkten bekannt ist. Diese Punkte sollen durch eine lineare Funktion $y = ax+b$ verbunden werden. Problem: a und b sind unbekannt. Idee: Löse folgendes lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lllll} (I) & F(c_{j-1}) & = & ac_{j-1} + b \\ (II) & F(c_j) & = & ac_j + b \\ \hline (II)-(I) & F(c_j) - F(c_{j-1}) & = & a(c_j - c_{j-1}) \end{array}$$

Wir erhalten
$$a = \frac{F(c_j) - F(c_{j-1})}{c_j - c_{j-1}}$$
und durch Einsetzen in (I)
$$b = F(c_{j-1}) - \frac{F(c_j) - F(c_{j-1})}{c_j - c_{j-1}} c_{j-1}$$

und damit für $x \in [c_{j-1}, c_j)$:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{F(c_j) - F(c_{j-1})}{c_j - c_{j-1}} x + F(c_{j-1}) - \frac{F(c_j) - F(c_{j-1})}{c_j - c_{j-1}} c_{j-1} \\ &= F(c_{j-1}) + \frac{x - c_{j-1}}{c_j - c_{j-1}} (F(c_j) - F(c_{j-1})) \end{aligned}$$