Aufgabe 1

Sind Ω_1, Ω_2 Mengen und ist $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ eine Abbildung, so bezeichnet man für $A \subset \Omega_1$ mit

$$f(A) := \{f(\omega) : \omega \in A\}$$

das *Bild* von A unter der Abbildung f und mit

$$f^{-1}(B) := \{\omega \in \Omega_1 : f(\omega) \in B\}$$

das *Urbild* von $B \subset \Omega_2$. Sei I eine Indexmenge und $B, B_i \subset \Omega_2, i \in I$ beliebige Teilmengen. Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Relationen

a)
$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i),$$

b)
$$f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i),$$

c)
$$f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c.$$

Aufgabe 2

Seien Ω_1, Ω_2 Mengen und $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ eine Abbildung und $\mathcal{A}_i$ eine σ-Algebra auf $\Omega_i, i = 1, 2$. Zeigen Sie

a) $f(\mathcal{A}_1) := \{B \subset \mathcal{A}_2 : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1\}$ ist eine σ-Algebra auf Ω_2,

b) $f^{-1}(\mathcal{A}_2) := \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{A}_2\}$ ist eine σ-Algebra auf Ω_1.

Aufgabe 3

Sei $\mathcal{A}_n := \sigma\Big(\big\{\{1\}, \{2\}, \dots \{n\}, \{\Omega\}\big\}\Big)$ eine σ-Algebra auf einer nichtabzählbaren Menge Ω (zum Beispiel $\mathbb{R}$). Man beweise, dass

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{A}_n &\longrightarrow [0; \infty] \\ A &\longmapsto \begin{cases} 0, & A \text{ abzählbar,} \\ 1, & A^C \text{ abzählbar} \end{cases} \end{aligned}$$

ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A}_n)$ ist.

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass alle Wahrscheinlichkeitsmaße P auf $(\{1, \dots, n\}, \mathcal{P}(\{1, \dots, n\}))$ von der Form

$$P = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \delta_k\ , \qquad \alpha_k \in [0, 1]\ \forall k \in \{1, \dots, n\}\ ,\ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$$

sind, wobei δ_k jeweils das Dirac-Maß an der Stelle k ist.

Die folgende Aufgabe ist hauptsächlich zum Selbststudium gedacht.

Aufgabe 5

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Man beweise folgende Eigenschaften von Maßen:

(a) *Endliche Additivität: Für ein $n \in \mathbb{N}$ seien $A_1 \in \mathcal{A}, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ so dass $A_i \cap A_j = \emptyset$ (für $i \neq j$). Dann ist*

$$\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \mu(A_1) + \dots + \mu(A_n)$$

(b) *Isotonie:*
$$A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{A}\,, \quad A \subset B \qquad \Rightarrow \qquad \mu(A) \ \leq\ \mu(B)$$

(c) *Subtraktivität:*

$$A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{A}\,,\ \ A \subset B\,,\ \ \mu(A) < \infty \qquad \Rightarrow \qquad \mu(B \setminus A) \ =\ \mu(B) - \mu(A)$$

(d) *Sub-Additivität:*

$$\Big(A_n\Big)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \qquad \Rightarrow \qquad \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \ \leq\ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

(f) *Stetigkeit von oben: Sei*

$$\Big(A_n\Big)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}\,; \qquad A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \ =\ A \ \in\ \mathcal{A}$$

wobei $\mu(A_n) \ <\ \infty \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\lim_{n \to \infty} \mu(A_n) \ =\ \mu(A)$$