Aufgabe 1

Auf einem Messraum $(\Omega, \mathcal{A})$ sei die reelle Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathcal{A}$ - messbar. Ist dann auch $\sin f$, d.h. die Funktion $\omega \mapsto \sin f(\omega)$, $\mathcal{A}$ - messbar?

Aufgabe 2

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ und $g : \Omega \to \mathbb{R}$ zwei $\mathcal{A}$ - messbare Funktionen. Man zeige, dass die Teilmengen von Ω, die in den Gleichungen

$$\mu\Big(\{\omega \mid f(\omega) \neq g(\omega)\}\Big) = 0$$

und

$$\mu\Big(\{\omega \mid f(\omega) > g(\omega)\}\Big) = 0$$

auftreten, tatsächlich in $\mathcal{A}$ liegen.

Aufgabe 3

Man zeige an Hand eines Beispiels, dass aus der $\mathcal{A}/\mathfrak{B}$-Messbarkeit von $|f|$ im Allgemeinen nicht die $\mathcal{A}/\mathfrak{B}$-Messbarkeit einer Funktion $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ folgt.

Aufgabe 4

Beweisen Sie folgenden Korollar aus der Vorlesung:

Korollar 6.10 (σ-Additivität des Integrals)**.** *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von $\mathcal{A}$ - messbaren Funktionen $f_k : \Omega \to \mathbb{R}$, so dass*

$$f_k(\omega) \geq 0 \qquad \forall \omega \in \Omega$$

für jedes $k \in \mathbb{N}$. Sei außerdem

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(\omega) < \infty \quad \forall \omega \in \Omega \, .$$

Dann ist

$$\int \sum_{k=1}^{\infty} f_k(\omega)\mu(d\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \int f_k(\omega)\mu(d\omega)$$

(und die beiden Integrale existieren gemäß Gleichung (6.3).)