Aufgabe 1

Beweisen Sie Teil (b) des folgenden Satzes:

Satz 6.15. *Sei* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum und* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *und* $g : \Omega \to \mathbb{R}$ *zwei* $\mathcal{A}$*-messbare Funktionen. Es gilt:*

(a)

$$f \geq 0 \quad \textit{und} \quad \int f \, d\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad f = 0 \quad \mu\text{-}\textit{f.s.}$$

(b)

$$f = g \quad \mu\text{-}\textit{f.s.} \Leftrightarrow \quad \int_A f \, d\mu = \int_A g \, d\mu \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

Aufgabe 2

Sei $\Omega = \mathbb{N}, \mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und $\sharp$ das Zählmaß hierauf. Beweisen Sie, dass in diesem Fall gilt:

a) Für jede nichtnegative Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ ist

$$\int f \, d\sharp = \sum_{i=1}^{\infty} f(i) \qquad .$$

b) Für jedes Maß ν auf $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ gilt

$$\nu \ll \sharp \qquad .$$

c) Für jedes σ-endliche Maß ν auf $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ ist die Dichte von ν bzgl. $\sharp$ gegeben durch

$$i \mapsto \nu(\{i\})$$

d) Für jedes σ-endliche Maß ν auf $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ und jede ν-messbare nichtnegative Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ ist

$$\int g \, d\nu = \sum_{i=1}^{\infty} g(i) \cdot \nu(\{i\}) \qquad .$$

Aufgabe 3

Betrachtet wird der Maßraum $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{B}^{\otimes 2}, \lambda^2)$. Gegeben ist eine messbare Funktion ϕ mit

$$\phi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ \exp(x+y) \end{pmatrix} .$$

Bestimmen Sie das Bildmaß $\phi(\lambda^2)$

Die folgende Aufgabe ist hauptsächlich zum Selbststudium gedacht.

Aufgabe 4

Beweisen Sie den folgenden Satz:

Satz 7.1. *Sei* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum und* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *eine* $\mathcal{A}$*-messbare Funktionen mit* $f(\omega) \geq 0$ *für alle* $\omega \in \Omega$*. Dann wird durch* $\nu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$, $A \mapsto \int_A f \, d\mu$ *ein Maß* ν *auf* $(\Omega, \mathcal{A})$ *definiert.*

Für

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu \qquad \forall A \in \mathcal{A}$$

schreiben wir auch $d\nu = f \, d\mu$*. Falls* $d\nu = f \, d\mu$*, so gilt auch*

$$\int g \, d\nu = \int g f \, d\mu \qquad \forall g \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$$