### Aufgabe 1

Sei $\Omega$ eine nicht abzählbare Menge und $\mathcal{A}$ die $\sigma$-Algebra, welche nur Mengen $A \subset \Omega$ enthält, für die entweder $A$ selbst oder $A^C$ abzählbar ist. $\mu$ sein ein Zählmaß und $\nu$ ist ein Maß mit $\nu(A) = 0$ bzw. $\nu(A) = +\infty$, je nachdem ob $A$ abzählbar ist oder nicht. Wird $\nu$ von $\mu$ dominiert? Besitzt $\nu$ eine Dichte bzgl. $\mu$?

### Aufgabe 2

Sei $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ ein Messraum und $F : x \mapsto F(x)$ mit

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{32}x & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{16}x^2 & 1 \leq x < 2 \\ \frac{1}{8}x + \frac{1}{4} & 2 \leq x < 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}$$

Sei $P$ das Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ mit Verteilungsfunktion $F$, d.h. $F(x) = P\Big((-\infty, x]\Big)$. Bestimmen Sie die Dichte von $P$ bzgl.

$$\mu = \lambda + \delta_0 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_4 \quad .$$

### Aufgabe 3

Sei $X$ eine normalverteilte Zufallsvariable auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ mit $\mu_x = \mathbb{E}(X) = 0$. Leiten Sie die Dichte der Zufallsvariablen $Y = |X|$ her.

**Hinweis**: Die Dichte einer normalverteilten Zufallsvariablen X ist

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right) \quad .$$

### Aufgabe 4

Seien $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\Omega_1', \mathcal{A}_1')$, $(\Omega_2', \mathcal{A}_2')$ Messräume. Sei $P$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Sei

$$X_1 \ : \ \Omega \ \to \ \Omega_1'$$

eine $\mathcal{A}/\mathcal{A}_1'$ - messbare Zufallsvariable und sei

$$X_2 \ : \ \Omega \ \to \ \Omega_2'$$

eine $\mathcal{A}/\mathcal{A}_2'$ - messbare Zufallsvariable. Setze

$$X \ : \ \Omega \ \to \ \Omega_1' \times \Omega_2' \,, \quad \omega \ \mapsto \ \Big(X_1(\omega), X_2(\omega)\Big)$$

Zeigen Sie, dass gilt: $X_1$ und $X_2$ sind stochastisch unabhängig, genau dann wenn

$$X(P) \ = \ \Big[X_1(P)\Big] \otimes \Big[X_2(P)\Big]$$

Die folgende Aufgabe ist hauptsächlich zum Selbststudium gedacht.

### Aufgabe 5

Seien $\mu$, $\nu$ zwei Maße auf $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$. Seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ zwei Maßräume, wobei $\mu_1$ und $\mu_2$ $\sigma$-endlich sind. Es gelte

$$\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2)$$

und

$$\nu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2)$$

für alle $A_1 \in \mathcal{A}_1$ und $A_2 \in \mathcal{A}_2$. Zeigen Sie mit Hilfe des Eindeutigkeitssatzes (Satz 3.9), dass

$$\mu = \nu$$