Aufgabe 1

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und sei

$$C_n \in \mathcal{A} \quad \text{mit} \quad P(C_n) > 0 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\,,$$

so dass $C_n \cap C_m = \emptyset$ für $n \neq m$ und

$$\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$$

Sei $\mathcal{C}$ die von $C_1, C_2, C_3, \ldots$ erzeugte σ-Algebra. Sei $X \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Wie sieht dann $\mathbb{E}_P\Big[\, X \,\Big|\, \mathcal{C}\, \Big]$ aus?

Aufgabe 2

Es sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{B}^2)$. π_1 bzw. π_2 bezeichne die kanonische Projektion $(x, y) \mapsto x$ bzw. y von $\mathbb{R}^2$ auf die x- bzw. y-Achse. Die Bildmaße $\pi_1(\mu)$ bzw. $\pi_2(\mu)$ heißen dann Marginalmaße von μ.

Man zeige, dass aus der Existenz einer Dichte f für μ bzgl. λ^2 die Existenz einer Dichte für jedes der beiden Marginalmaße folgt und gebe die Dichten an.

Aufgabe 3

Seien $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\Omega_1', \mathcal{A}_1')$ und $(\Omega_2', \mathcal{A}_2')$ Messräume. Sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Seien

$$\begin{aligned} X_1 : &\quad (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\Omega_1', \mathcal{A}_1') \\ X_2 : &\quad (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\Omega_2', \mathcal{A}_2') \end{aligned}$$

stochastisch unabhängige Zufallsvariablen. Sei

$$\varphi : \quad \Omega_1' \times \Omega_2' \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine $\mathcal{A}_1' \otimes \mathcal{A}_2'$ - messbare Funktion, so dass

$$\varphi \circ \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P) \quad ,$$

sowie eine $\mathcal{A}_1'$ - messbare Abbildung

$$\begin{aligned} \psi_1 : \ \Omega_1' &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x_1 &\longmapsto \mathbb{E}_P\Big(\varphi(x_1, X_2)\Big) = \int_\Omega \varphi(x_1, X_2(\omega))\, P(d\omega) \quad . \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

$$\mathbb{E}_P\Big[\varphi(X_1, X_2) \,\Big|\, X_1\Big] \; = \; \psi_1 \circ X_1 \quad .$$