Prof Dr. Sonja Greven
David Rügamer, M.Sc.
Institut für Statistik

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Punkte					

Klausur zur Vorlesung
Einführung in die Stochastischen Prozesse

24. Juli 2015

Hinweise:

1. Überprüfen Sie zunächst, ob Ihre Klausurangabe vollständig ist. Die Klausurangabe sollte aus 6 Blättern inklusive Deckblatt mit Aufgaben auf den Seiten 2, 4, 8 und 10 bestehen.
2. Verwenden Sie für Ihre Lösungen ausschließlich die Klausurangabe. Zusatzblätter werden auf Anfrage ausgeteilt.
3. Legen Sie einen Lichtbildausweis und einen aktuell gültigen Studienausweis bereit.
4. Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. In den ersten 20 Minuten und in den letzten 15 Minuten ist keine vorzeitige Abgabe vorgesehen.
5. Folgende Hilfsmittel sind zugelassen:
   - nicht-programmierbarer Taschenrechner
   - Ausgedruckte Formelsammlung (mit handschriftlichen Ergänzungen auf den bedruckten Seiten)
6. Es können maximal 90 Punkte erreicht werden. Ein nachvollziehbarer Lösungsweg ist Voraussetzung zum Erlangen der vollen Punktzahl.
7. Bei Unterschleif erfolgt eine Meldung an das Prüfungsamt. Sie sind verpflichtet, durch Ihr Verhalten jegliche Missverständnisse diesbezüglich auszuschließen. Darunter fällt auch das Schreiben mit Rot- und/oder Bleistift.

Bitte ausfüllen und unterschreiben!

Name (in Druckbuchstaben): ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Studiengang (inkl. Jahr der PO): ______________________________

Ich bin mit einer Veröffentlichung meines Klausurergebnisses als Aushang im Institut für Statistik, Ludwigstraße 33, in der Form <Matrikelnummer>, <Note> einverstanden.
(Falls nichtzutreffend, bitte diesen Satz streichen.)

Ich bestätige, dass ich obige Hinweise zur Kenntnis genommen und die Angabe auf Vollständigkeit überprüft habe.

Unterschrift: ______________________________

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 **(15 Punkte)**

Für einen Poisson-Prozess $\{N(t), t \geq 0\}$ mit Werten $k, n \in \mathbb{N}$, $k < n$ gilt folgender Zusammenhang:

$$P(N(s) = k \mid N(t) = n) \;=\; \binom{n}{k} \left(\frac{s}{t}\right)^k \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-k} \quad \text{für} \quad s < t\,. \tag{1}$$

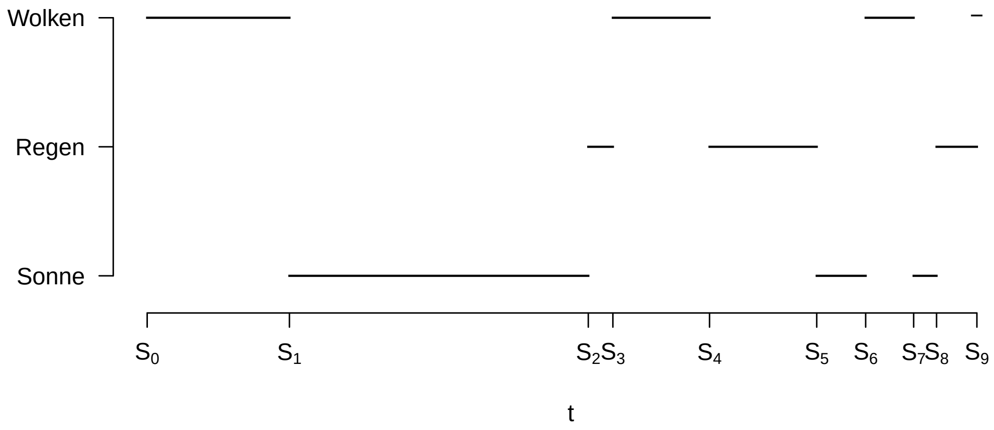
Geben Sie den Lösungsansatz für den Beweis der obigen Gleichung an und interpretieren Sie die angegebene Formel in (1).

Aufgabe 2 (35 Punkte)

Sei $\{X(t), t \geq 0\}$ ein homogener, regulärer Markov-Prozess, der den aktuellen Wetterzustand beschreibt. Dabei werden drei mögliche Zustände unterschieden: Sonne (S), Regen (R) und Wolken (W). Gegeben seien die folgenden beobachteten Ereigniszeitpunkte des Markov-Prozesses:

S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9
0	5.96	18.48	19.51	23.56	28.05	30.10	32.11	33.07	34.76

und folgende Realisierung des Pfades:



a) Bestimmen Sie die gemeinsame Likelihood für die Parameter der Übergangsmatrix $\boldsymbol{Q}$ und die der Intensitätsmatrix $\boldsymbol{\Lambda}$ unter der Annahme, dass der gegebene Pfad vollständig ist.

b) Bestimmen Sie die Maximum-Likelihood-Schätzungen für die Übergangsmatrix der eingebetteten Markov-Kette $\boldsymbol{Q}$, für die Verteilungsparameter λ_i und die Intensitätsmatrix $\boldsymbol{\Lambda}$.

c) Angenommen $\lambda_{ij} > 0 \, \forall i \neq j$. Besitzt der hier betrachtete Markov-Prozess in diesem Fall eine Grenzverteilung? Begründen Sie Ihre Antwort. Wenn ja, berechnen Sie einen Schätzer für die Grenzverteilung und interpretieren Sie diesen.

Aufgabe 3 (25 Punkte)

Durch das so genannten *Susceptible-Infective-Removal* (*SIR*) *model* wird der Epidemieverlauf einer infektiösen Krankheit erklärt. Der dadurch beschriebene Prozess von Krankheitsstadien und deren täglichen Übergängen kann durch eine Markov-Kette 1. Ordnung mit der folgenden Übergangsmatrix für die Zustände $S_0, \dots, S_4$ beschrieben werden:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} S_0 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{11} & p_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

S_0 Anfällig für Krankheit
S_1 Erkrankt, ohne erkennbare Symptome
S_2 Erkrankt, erkennbare Symptome
S_3 Geheilt
S_4 Verstorben

(a) Zeichnen Sie den zur Übergangsmatrix gehörenden Markov-Graphen.

(b) Interpretieren Sie die Vorgaben der angegebenen Übergangsmatrix in Hinblick auf mögliche Krankheitsverläufe.

(c) Welche Zustände sind offen, welche abgeschlossen?

(d) Geben Sie die Klasseneinteilung für die Markov-Kette an und begründen Sie Ihr Vorgehen.

(e) Bringen Sie die Übergangsmatrix in die kanonische Form.

(f) Welche Zustände sind absorbierend?

(g) Ist die Markov-Kette irreduzibel? Begründen Sie kurz.

Aufgabe 4 (15 Punkte)

Sei $W = \big\{W(t), t \geq 0\big\}$ ein Wiener Prozess.

a) Ist W schwach stationär? Ist W streng stationär? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Betrachten Sie nun den Prozess $X = \{X(t), t \geq 0\}$ mit

$$X(t) = \begin{cases} \frac{W(t)}{\sqrt{t}} & t \geq 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

Ist X schwach stationär? Handelt es sich bei X ebenfalls um einen Wiener Prozess? Begründen Sie Ihre Antworten.