Prof Dr. Sonja Greven
David Rügamer, M.Sc.
Institut für Statistik

Aufgabe	1	2	3	$\sum$
Punkte				

Klausur zur Vorlesung Einführung in die Stochastischen Prozesse

18. Juli 2016

Hinweise:

1. Überprüfen Sie zunächst, ob Ihre Klausurangabe vollständig ist. Die Klausurangabe sollte aus 7 Blättern inklusive Deckblatt mit Aufgaben auf den Seiten 2, 6 und 10 bestehen.
2. Verwenden Sie für Ihre Lösungen ausschließlich die Klausurangabe. Zusatzblätter werden auf Anfrage ausgeteilt.
3. Legen Sie einen Lichtbildausweis und einen aktuell gültigen Studienausweis bereit.
4. Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. In den ersten 20 Minuten und in den letzten 15 Minuten ist keine vorzeitige Abgabe vorgesehen.
5. Folgende Hilfsmittel sind zugelassen:
   - nicht-programmierbarer Taschenrechner
   - Ausgedruckte Formelsammlung (mit handschriftlichen Ergänzungen auf den bedruckten Seiten)
6. Es können maximal 80 Punkte erreicht werden. Ein nachvollziehbarer Lösungsweg ist Voraussetzung zum Erlangen der vollen Punktzahl.
7. Bei Unterschleif erfolgt eine Meldung an das Prüfungsamt. Sie sind verpflichtet, durch Ihr Verhalten jegliche Missverständnisse diesbezüglich auszuschließen. Darunter fällt auch das Schreiben mit Rot- und/oder Bleistift.

Bitte ausfüllen und unterschreiben!

Name (in Druckbuchstaben): ____________________

Matrikelnummer: ____________________

Studiengang (inkl. Jahr der PO): ____________________

Ich bin mit einer Veröffentlichung meines Klausurergebnisses als Aushang im Institut für Statistik, Ludwigstraße 33, in der Form <Matrikelnummer>, <Note> einverstanden.
(Falls nichtzutreffend, bitte diesen Satz streichen.)

Ich bestätige, dass ich obige Hinweise zur Kenntnis genommen und die Angabe auf Vollständigkeit überprüft habe.

Unterschrift: ____________________

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 **(20 Punkte)**

a) Sei zunächst ein homogener Poisson-Prozess $\{N(t), t \geq 0\}$ mit der Rate λ gegeben.

   (i) Wie sind die Zwischenzeiten zwischen zwei Ereignissen für den gegebenen Prozess verteilt? Um was für einen Prozess würde es sich handeln, wenn man diese Verteilungsannahme verallgemeinert?

   (ii) Ist der Prozess $M(t) = N(t) - \lambda t$ schwach stationär? Begründen Sie Ihre Antwort.

   (iii) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das 21te Ereignis spätestens zum Zeitpunkt $s + h$ eintritt, wenn zum Zeitpunkt s genau 20 Ereignisse eingetreten sind?

b) Gegeben sei nun ein Wiener-Prozess $\{W(t), t \geq 0\}$ mit Varianz $\sigma^2 t$.

   (i) Beschreiben Sie mit eigenen Worten, wie die Realisation eines Wiener-Prozesses $W(t)$ auf dem Zeitintervall $[0, t_{\max}], t_{\max} \geq 0$ auf äquidistanten Beobachtungszeitpunkten mit Abstand Δt simuliert werden kann.

   (ii) Handelt es sich bei $Y(t) = t + X(t)$ ebenfalls um einen Wiener-Prozess? Begründen Sie Ihre Antwort.
   Hinweis: Gehen Sie davon aus, dass Axiom (W4) erfüllt ist.

Aufgabe 2 **(25 Punkte)**

An der Kasse eines Discounters existiert ein sehr langes Warenband, so dass jeder Kunde alle Waren auf das Band legen kann, bevor der Kunde an der Reihe ist. Ist nur ein Kunde an der Kasse, so wartet der Kassierer höflich, bis der Kunde alle Waren auf das Band gelegt hat. Ist der Kunde an der Reihe, so scannt der Kassierer jede Ware einzeln und fährt so lange mit der Tätigkeit fort, bis alle Waren gescannt sind. Die Zeit bis der Kassierer einen weiteren Artikel gescannt hat, sei dabei exponentialverteilt mit Rate λ.

Frau Müller kauft in der beschriebenen Filiale $n \in \mathbb{N}$ Artikel ein. Im Folgenden sei $t = 0$ der Zeitpunkt nachdem Frau Müller alle Waren auf das Band gelegt hat.

(a) Betrachten Sie zunächst den zeitstetige Prozess $\{N(t), t \geq 0\}$, der die Anzahl der gescannten Waren beschreibt.

  (i) Geben Sie Parameter- und Zustandsraum von $\{N(t)\}$ an.

  (ii) Durch welchen speziellen Markov-Prozess kann $\{N(t)\}$ beschrieben werden? Begründen Sie kurz.

  (iii) Wie müsste die gegebene Anwendung modifiziert werden, damit es sich bei $\{N(t)\}$ um einen Poisson-Prozess handelt. Begründen Sie kurz.

Hat der Kassierer die Ware gescannt, so legt er diese auf eine Ablagefläche. Frau Müller entnimmt die Artikel mit identisch exponentialverteilten Zwischenzeiten mit Rate μ aus der Ablagefläche.

Die Anzahl der in der Ablagefläche befindlichen Artikel beim Einkauf von Frau Müller kann ebenfalls durch einen zeitstetigen Prozess $\{X(t), t \geq 0\}$ beschrieben werden. Gehen Sie für die folgenden Teilaufgaben davon aus, dass die Ablagefläche maximal vier Artikel fasst und der Kassierer mit dem Scannen weiterer Artikel bei voller Ablage so lange wartet, bis ein Artikel aus der Ablage entnommen wurde.

(b) Um welchen speziellen Markov-Prozess handelt es sich bei $\{X(t)\}$?

(c) Geben Sie die Intensitätsmatrix Λ sowie die Übergangsmatrix Q der eingebetteten Markov-Kette an.

(d) Sie haben nun anhand des Einkaufs von Frau Müller die stationäre Verteilung $\hat{\boldsymbol{\nu}}$ der eingebetteten Markov-Kette geschätzt. Beschreiben Sie, wie mithilfe von $\hat{\boldsymbol{\nu}}$ die Grenzverteilung $\boldsymbol{\pi}$ von $\{X(t)\}$ geschätzt werden kann (es ist keine explizite Berechnung erforderlich).

(e) Geben Sie die gemeinsame Likelihood für λ und μ basierend auf den ersten zwei Zustandsänderungen des gegebenen Prozesses an (Fallunterscheidung). Gehen Sie dazu davon aus, dass zunächst ein Artikel durch den Kassierer auf die Ablagefläche gelegt wird.

Aufgabe 3 (35 Punkte)

Im Folgenden soll der Zustand eines Gebrauchsgegenstandes nach der t-ten Benutzung durch die Markov-Kette $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ beschrieben werden. Der Gegenstand kann ungebraucht, also neu (N), gebraucht (G) oder defekt (D) sein. Gehen Sie davon aus, dass der Gegenstand nach der ersten Benutzung gebraucht ist und danach aber bei jeder Benutzung mit Wahrscheinlichkeit $a \in (0, 1]$ kaputt gehen kann. Außerdem wird mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}a$ der Gegenstand bei Benutzung in defektem Zustand repariert und gilt danach wieder als gebraucht.

a) Stellen Sie die Übergangsmatrix $\boldsymbol{P}$ für $\{X_t\}$ auf. Für welche Werte von a ist $\boldsymbol{P}$ wohldefiniert?

b) Zeichnen Sie den zugehörigen Markov-Graphen.

c) Bestimmen Sie die Äquivalenzklassen von X_t und begründen Sie Ihr Ergebnis kurz.

d) Geben Sie die kanonische Form von $\boldsymbol{P}$ an.

e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Gegenstand nach dem zweiten Gebrauch defekt ist? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Gegenstand nach dem dritten Gebrauch gebraucht ist?

Betrachten Sie nun im Folgenden die Markov-Kette $\{\widetilde{X}_t, t \geq 1\}$ eines einmalig benutzten Gebrauchsgegenstandes mit Zustandsraum $\mathcal{S} = \{G, D\}$ und Übergangsmatrix $\widetilde{\boldsymbol{P}}$.

f) Bestimmen Sie die stationäre Verteilung $\boldsymbol{\pi} = (\pi_G, \pi_D)$ von X_t. Wie lässt sich $\boldsymbol{\pi}$ interpretieren?

g) Für einen Gegenstand, der 300mal gebraucht wurde, ergibt sich die folgende Tabelle:

		t	
		G	D
$t-1$	G	31	90
	D	42	137

Stellen Sie mit Hilfe dieser Kreuztabelle die Likelihood sowie Log-Likelihood für den Parameter a auf und beschreiben Sie kurz, wie Sie den ML-Schätzer für a herleiten würden (eine explizite Berechnung ist nicht verlangt).

Hinweis: Sie können beim Bestimmen der Likelihood die Nebenbedingungen aus Aufgabe a) ignorieren.