Prof Dr. Sonja Greven
David Rügamer, M.Sc.
Institut für Statistik

Aufgabe	1	2	3	$\sum$
Punkte				

Nachholklausur zur Vorlesung Einführung in die Stochastischen Prozesse

17. Oktober 2016

Hinweise:

1. Überprüfen Sie zunächst, ob Ihre Klausurangabe vollständig ist. Die Klausurangabe sollte aus 6 Blättern inklusive Deckblatt mit Aufgaben auf den Seiten 2, 4 und 8 bestehen.
2. Verwenden Sie für Ihre Lösungen ausschließlich die Klausurangabe. Zusatzblätter werden auf Anfrage ausgeteilt.
3. Legen Sie einen Lichtbildausweis und einen aktuell gültigen Studienausweis bereit.
4. Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. In den ersten 20 Minuten und in den letzten 15 Minuten ist keine vorzeitige Abgabe vorgesehen.
5. Folgende Hilfsmittel sind zugelassen:
   - nicht-programmierbarer Taschenrechner
   - Ausgedruckte Formelsammlung (mit handschriftlichen Ergänzungen auf den bedruckten Seiten)
6. Es können maximal 75 Punkte erreicht werden. Ein nachvollziehbarer Lösungsweg ist Voraussetzung zum Erlangen der vollen Punktzahl.
7. Bei Unterschleif erfolgt eine Meldung an das Prüfungsamt. Sie sind verpflichtet, durch Ihr Verhalten jegliche Missverständnisse diesbezüglich auszuschließen. Darunter fällt auch das Schreiben mit Rot- und/oder Bleistift.

Bitte ausfüllen und unterschreiben!

*Name (in Druckbuchstaben):*____________________

*Matrikelnummer:*____________________

*Studiengang (inkl. Jahr der PO):*____________________

Ich bin mit einer Veröffentlichung meines Klausurergebnisses als Aushang im Institut für Statistik, Ludwigstraße 33, in der Form <Matrikelnummer>, <Note> einverstanden.
(Falls nichtzutreffend, bitte diesen Satz streichen.)

Ich bestätige, dass ich obige Hinweise zur Kenntnis genommen und die Angabe auf Vollständigkeit überprüft habe.

*Unterschrift:*____________________

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 **(15 Punkte)**

Für einen Poisson-Prozess $\{N(t), t \geq 0\}$ mit Werten $k, n \in \mathbb{N}$, $k < n$ gilt folgender Zusammenhang:

$$P(N(s) = k \mid N(t) = n) \; = \; \binom{n}{k} \left(\frac{s}{t}\right)^k \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-k} \quad \text{für} \quad s < t \, . \tag{1}$$

Geben Sie den Lösungsansatz für den Beweis der obigen Gleichung an und interpretieren Sie die angegebene Formel in (1).

Aufgabe 2 (35 Punkte)

In einer kleinen Postfiliale mit einem Schalter ist die Zeit zwischen der Ankunft von Kunden exponentialverteilt mit der Rate $\lambda > 0$. Die Zeit, die der Postangestellte braucht, um einen Kunden zu bedienen, ist exponentialverteilt mit Rate $\mu > 0$. Befinden sich zwei oder mehr als zwei Kunden in der Post, wird ein zusätzlicher Angestellter gerufen und ein zweiter Schalter eröffnet. Die Zeit bis ein Kunde bedient wird, ist im Fall von zwei geöffneten Schaltern exponentialverteilt mit Rate 2μ. Die Post fasst maximal vier Kunden, d.h. wenn sich vier Kunden in der Postfiliale aufhalten, werden weitere Kunden zu einer anderen Filiale geschickt.

Im Folgenden ist der zeitstetige Prozess $\{X(t), t \geq 0\}$ von Interesse, der die Anzahl der in der Postfiliale befindlichen Kunden zum Zeitpunkt t beschreibt.

(a) Durch welchen speziellen Markov-Prozess kann $\{X(t)\}$ beschrieben werden? Bestimmen Sie die Intensitätsmatrix Λ sowie die Übergangsmatrix Q der eingebetteten Markovkette.

(b) Beschreiben Sie in eigenen Worten oder Pseudo-Code, wie sich Pfade des Prozesses $\{X(t)\}$ auf dem Zeitintervall $[0, s]$ mit $s \geq 0$ bei gegebenen Raten λ und μ simulieren lassen.

(c) Ist $\{X(t)\}$ irreduzibel und / oder positiv-rekurrent? Begründen Sie Ihre Antwort.

(d) Stellen Sie ein Gleichungssystem für die Grenzverteilung π von $\{X(t)\}$ auf. Es ist keine explizite Berechnung der Grenzverteilung erforderlich. Die Angabe der Formel und die Beschreibung des Vorgehens zur Berechnung sind zum Erlangen der vollen Punktzahl dieser Teilaufgabe ausreichend.

(e) Geben Sie die gemeinsame Likelihood für λ und μ für die ersten zwei Zustandsänderungen des gegebenen Prozesses am Beginn eines Tag (nach Öffnung der Postfiliale) an.

(f) Manche der Kunden kommen auch in Paaren, d.h. ein realistischeres Modell als die Annahme einer konstanten Ankunftsrate ist eine erhöhte Ankunftsrate in der ersten Minute nach Eintreffen des letzten Kunden. Was für ein Prozess ergibt sich in diesem modifizierten Modell (mit Begründung)?

Aufgabe 3 (25 Punkte)

Ein Student geht unter der Woche täglich in einer kleinen Kantine in der Nähe der Universität zum Mittagessen. Die Kantine bietet jeden Tag ein Hauptgericht (H) und eine Suppe (S) an. Da der Student Vegetarier ist, hängt seine Essenswahl davon ab, ob das Hauptgericht Fleisch enthält. Ist dies nicht der Fall, wählt der Student das Hauptgericht, anderenfalls die stets vegetarische Suppe.

Der Student nimmt an, dass die Folge seiner Essensentscheidungen (und damit die eigentlich interessierende Folge der Inhaltsstoffe im Hauptgericht) am Tag t einer homogenen Markov-Kette $\{X_t, t \in \mathbb{N}\}$ mit dem Zustandsraum $\mathcal{S} = \{H, S\}$ folgt. Für den Übergang vom Hauptgericht zur Suppe nimmt der Student die Wahrscheinlichkeit a an, für den Übergang von Suppe zu Hauptgericht die Wahrscheinlichkeit $2 - 2a$.

a) Stellen Sie die Übergangsmatrix $\boldsymbol{P}$ für $\{X_t\}$ auf. Für welche Werte von a ist $\boldsymbol{P}$ wohldefiniert? Für welche zwei Grenzfälle von a ergibt sich keine inhaltlich sinnvolle Übergangsmatrix und warum?

b) Gegeben der Student wählt heute das Hauptgericht – wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er übermorgen die Suppe isst?

c) Bestimmen Sie die stationäre Verteilung $\boldsymbol{\pi} = (\pi_H, \pi_S)$ von X_t. Wie lässt sich $\boldsymbol{\pi}$ interpretieren?

d) Der Student sammelt einige Wochen die getroffenen Entscheidungen für seine Mittagsspeise. Für die Anzahl der Übergänge zwischen den Zuständen erhält er die folgende Tabelle:

		t	
		H	S
$t-1$	H	31	21
	S	42	137

Stellen Sie mit Hilfe dieser Kreuztabelle die Likelihood sowie Log-Likelihood für den Parameter a auf leiten Sie den ML-Schätzer her.

Hinweis: Sie können beim Bestimmen der Likelihood die Nebenbedingungen aus Aufgabe a) ignorieren.